RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

ANNUNZIO.

Per ogni Nota o Memoria, presentata in una sola adunanza del Circolo, la qua'e sorpassi le 16 pagine di stampa, rimane a carico dell'Autore la *spesa di composizione* delle pagine eccedenti, in ragione di L. 3, 15 per ogni pagina o parte di essa.

Gli Autori che desiderano *Estratti* delle Note e Memorie inserite nei Rendiconti, sono vivamente pregati di avvertirne la Redazione nell'atto di rinviare le prove di stampa. A fine di agevolare i soci nella pubblicazione dei loro lavori, gli estratti saranno ad essi mandati a mano a mano che procede la stampa del fascicolo.

Il prezzo degli estratti è regolato come segue:

Per un foglio di 8 pagine, o meno:

50 esemplari = L. 5; 100 = L. 7, 75; 150 = L. 11; 200 = L. 13, 75; 250 = L. 17; 300 = L. 20, 25; 350 = L. 23, 50; 400 = L. 26, 75.

Per ogni foglio successivo di pagine 8, o parte di esso (oltre la spesa di composizione, come sopra, per le pagine eccedenti i due fogli di stampa):

50 esemplari = L. 3, 75; 100 = L. 5, 25; 150 = L. 7, 25; 200 = L. 8, 75; 250 = L. 10, 75; 300 = L. 12, 75; 350 = L. 14, 75; 400 = L. 16, 75.

Le tavole sono a carico degli Autori.

REDAZIONE: 28, via Ruggiero Settimo — Palermo.

Tipografia Matematica, 28, via Ruggiero Settimo, Palermo.
Proto-Compositore: GAETANO SENATORE.
Macchina tipo Marinoni perfezionato della casa AUGUSTO DELL'ORTO di Milano.

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

TOMO XIII. — ANNO 1899.

PARTE PRIMA: MEMORIE E COMUNICAZIONI.

PALERMO,
SEDE DELLA SOCIETÀ
28, via Ruggiero Settimo, 28

1899

MEMORIE E COMUNICAZIONI.

RIDUZIONE DEI FASCI DI CURVE PIANE DI GENERE 2.

Nota di **Michele de Franchis**, in Palermo.

Adunanza del 14 agosto 1898.

Questo lavoro si riattacca alle note ricerche dei signori Noether, Bertini, Guccia, Del Pezzo, Segre, Martinetti, Jung, Castelnuovo sulla riduzione dei sistemi lineari di curve piane (*).

(*) Noether: *Zur Theorie der eindeutigen Ebenentransformationen* (Math. Ann. Bd. V, s. 635);

Bertini: *Ricerche sulle trasformazioni univoche involutorie nel piano* (Ann. di Matem., t. $VIII_2$, pag. 244);

Guccia: *Generalizzazione di un teorema di Noether* (Questi Rend., t. I, pag. 139), *Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche e sopra un teorema generale delle curve algebriche di genere p* (Ibid., t. I, pag. 169) e *Due sistemi lineari d'ordine minimo, di genere $p = 2$* (Ibid., t. I, pag. 388);

Del Pezzo: *Sulle superficie dell'n^{mo} ordine immerse nello spazio di n dimensioni* (Ibid., t. I, pag. 241);

Segre: *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p* (Ibid., t. I, pag. 217);

Martinetti: *Sopra alcuni sistemi lineari di curve piane algebriche di genere due* (Ibid., t. I, pag. 205);

In esso, servendomi del metodo di Noether, pervengo aritmeticamente a sette tipi di fasci di genere 2. Il trovare poi direttamente se questi sette tipi esistano effettivamente, presenta, per alcuni di essi, delle difficoltà. Io sono riuscito a dimostrare l'esistenza di sei dei sette tipi, anzi per cinque di essi la più generale costruzione (e determinando in conseguenza di qual natura siano i legami fra i punti base). Per il settimo tipo dimostro la non esistenza.

In quanto al sesto tipo, che è un certo fascio di curve di 13^{mo} ordine, mi contento di dimostrarne qui l'esistenza, servendomi di una trasformazione piana doppia. Appunto qui osservo che la classificazione dei fasci di curve piane di genere 2 si può far dipendere da quella dei piani doppi razionali la cui curva di diramazione sia dell'ordine $2n$ con un punto, O, $(2n-6)$-plo o $(2n-5)$-plo. Quest'ordine d'idee mi venne richiamato dal ch.mo prof. Enriques, al quale sono lieto di poter rendere pubblicamente vive grazie per i consigli di cui m'è stato largo. Io possiedo in effetti tale classificazione, ma non ho creduto di porla qui, per non rendere ancor più lungo il lavoro. Il metodo dei piani doppi si presta però per veder subito l'esistenza dei fasci trovati.

Dietro il mio lavoro e quelli dei sigg. Bertini, Segre, Guccia, Martinetti e Castelnuovo, si può dire completa la riduzione dei sistemi lineari di curve piane di genere 2.

1. Noi consideriamo come equivalenti due sistemi lineari di curve che possano dedursi l'uno dall'altro mediante una trasformazione Cremoniana, e ci proponiamo la ricerca dei tipi (non equivalenti) dei fasci di curve piane di genere 2.

Dato un fascio (irreducibile) di curve di genere 2, denotiamone con n l'ordine, e con $r_1, r_2, \ldots, r_t$ le molteplicità dei punti base (alcuni dei quali anche infinitamente vicini tra loro nel senso di

---

Jung: *Ricerche sui sistemi lineari di genere qualunque e sulla loro riduzione all'ordine minimo* (Ann. di Matem., t. XV_2 pag. 277 e t. XVI_2 pag. 291);

Castelnuovo: *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve iperellittiche.* (Questi Rend. t. IV, pag. 73).

Noether). Si avranno le due relazioni:

(1) $$\sum_{i=1}^{s} r_i^2 = n^2$$

(2) $$\sum_{i=1}^{s} r_i = 3n + 2.$$

Inoltre si hanno le diseguaglianze:

(3) $$r_i \leqq n - 2 \qquad (i = 1, 2, \ldots, s)$$

(4) $$r_i + r_j \leqq n \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, s;\ i \neq j)$$

(5) $$3 < n.$$

Le formole (2) e (4) mostrano che:

Un fascio di curve di genere 2 non può possedere meno di tre punti base (distinti od infinitamente vicini) (*).

Poniamo l'ordine delle r_i in guisa che sia:

(6) $$r_1 \geqq r_2 \geqq r_3 \geqq \ldots \geqq r_s > 0.$$

Se $r_1 + r_2 + r_3 > n$, i tre punti r_1-plo, r_2-plo, r_3-plo non sono certamente in linea retta. Quindi *se essi sono a distanza finita fra loro ovvero anche infinitamente vicini, purchè al punto r_1-plo non siano, separatamente, infinitamente vicini i punti r_2-plo, r_3-plo si può eseguire una trasformazione quadratica, avente per punti fondamentali i tre punti dati; ed il fascio trasformato del dato ha l'ordine inferiore ad n.*

Dico che, *escluso un caso eccezionale, anche quando, pur essendo $r_1 + r_2 + r_3 > n$, i punti r_2-plo ed r_3-plo sono, separatamente, infinitamente vicini al punto r_1-plo, si può sempre trovare una trasformazione Cremoniana la quale abbassi l'ordine del fascio.*

(*) Veramente, mediante le diseguaglianze date, potrebbe dirsi qualche cosa di più, ma a noi basta semplicemente questa proposizione.

Per la dimostrazione, cangiamo alquanto le notazioni e poniamo:

$$r_1 = j, \qquad r_2 = i_1, \qquad r_3 = i_2;$$

supponiamo inoltre, per maggior generalità, che al punto j-plo si siano anche separatamente avvicinati punti di moltiplicità $i_3, i_4, \ldots, i_\nu$ $(\nu \geqq 2)$.

Dico che esistono punti base oltre questi. Basta osservare che

$$(7) \qquad n - 2 \geqq j \geqq i_1 + i_2 + \ldots + i_\nu,$$

ed osservare che, se i punti base fossero questi soli che noi abbiamo considerato, la (2) non sarebbe verificata.

Indichiamo dunque con $b_1, b_2, \ldots, b_\mu$ le moltiplicità dei punti base diversi da quelli considerati.

Si ha, per ipotesi,

$$(8) \qquad j + i_1 + i_2 > n$$

ed inoltre i tre punti j-plo, i_1-plo, i_2-plo sono i punti base di più elevata moltiplicità, ed è $j \geqq i_1 + i_2$ $(i_1, i_2 > 0)$, quindi si può supporre:

$$j > i_1 \geqq i_2 \geqq i_3 \geqq \ldots \geqq i_\nu > 0 \qquad (\nu \geqq 2)$$

$$i_2 \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_\mu > 0. \qquad (\mu \geqq 1)$$

Se intanto $j + 2b_1 > n$, si può sempre con una trasformazione quadratica abbassar l'ordine del fascio. Difatti, se il punto b_1-plo non cade nel punto j-plo (cioè non è un punto *satellite* di qualcuno dei punti i_r-pli), la trasformazione quadratica cercata è, p. e., quella che ha per punti fondamentali il punto b_1-plo ed i punti j-plo, i_1-plo. Se poi il punto b_1-plo fosse satellite d'un punto i_r-plo, sarebbe $i_r \geqq b_1$ e quindi $j + i_r + b_1 > n$, laonde la trasformazione quadratica avente i punti fondamentali nei punti j-plo, i_r-plo, b_1-plo abbasserebbe l'ordine del fascio.

Resta quindi da far l'ipotesi:

$$j + 2\, b_1 \leqq n,$$

dalla quale $b_1 \leqq \frac{n-j}{2}$. Poniamo:

$$(9) \qquad \begin{cases} b_k^2 = \sigma_k \left(\frac{n-j}{2}\right)^2 & (k = 1, 2, \ldots, \mu) \\ i_k^2 = s_k i_1^2. & (k = 1, 2, \ldots, \nu) \end{cases}$$

Risulta essere:

$$0 < \sigma_k \leqq 1; \qquad 0 < s_k \leqq 1,$$

laonde

$$(10) \qquad \begin{cases} b_k \geqq \sigma_k \frac{n-j}{2} \\ i_k \geqq s_k i_1. \end{cases}$$

Con ciò, le formole (1) e (2) dànno:

$$(11) \qquad n^2 = j^2 + i_1^2 \sum_{k=1}^{\nu} s_k + \left(\frac{n-j}{2}\right)^2 \sum_{k=1}^{\mu} \sigma_k$$

$$(12) \qquad 3\, n + 2 \geqq j + i_1 \sum_{k=1}^{\nu} s_k + \frac{n-j}{2} \sum_{k=1}^{\mu} \sigma_k.$$

Da queste, eliminando $\sum_{k=1}^{\mu} \sigma_k$ [cioè moltiplicando la (12) per $\frac{n-j}{2}$, sottraendo da essa la (11) e riducendo a zero il primo membro], si ha:

$$(13) \qquad 0 \geqq \frac{n-j}{2}(3\, j - n - 2) + \left(\frac{n-j}{2} - i_1\right) i_1 \sum_{k=1}^{\nu} s_k.$$

Essendo $j + i_1 + i_2 > n$ ed $i_1 \geqq i_2$, è $j + 2 i_1 > n$, cioè $i_1 > \frac{n-j}{2}$ ed inoltre è

$$i_1 \sum_1^{\nu} s_h \leqq \sum_1^{\nu} i_h \leqq j,$$

quindi sarà, a maggior forza,

$$0 \geqq \frac{n-j}{2}(2j - n - 2) + j(n - j - i_1),$$

od ancora

$$n - j \geqq \frac{n-j}{2}(2j - n) + j(n - j - i_1). \tag{14}$$

Ora $j + i_1 + i_2 > n$, $i_1 + i_2 \leqq j$, quindi $2j > n$, cioè $2j - n > 0$.
Inoltre $j + i_1 \leqq n$ e quindi $n - j - i_1 \geqq 0$. Segue perciò dalla (14)

$$n - j \geqq \frac{n-j}{2}(2j - n),$$

dovendo essere $2j - n > 0$, $n - j > 0$, da questa ricavasi

$$2 \geqq 2j - n > 0.$$

Laonde o $2j - n = 1$, ovvero $2j - n = 2$.
Discutiamo partitamente questi due casi:
1° Caso: $2j - n = 1$.—Posto $j = \rho$, ricavasi $n = 2\rho - 1$ e la (14) dà

$$\rho - 1 \geqq 2\rho(\rho - 1 - i_1).$$

Essendo, per ipotesi, $\rho = j$, $j \geqq i_1 + i_2$, $i_2 \geqq 1$, e quindi $\rho - 1 - i_1 \geqq 0$, questa diseguaglianza non è possibile che per $\rho - 1 - i_1 = 0$ ossia per $i_1 = \rho - 1$. In tal caso, sarà necessariamente $i_2 = 1$ (per la condizione $j \geqq i_1 + i_2$, $i_2 \geqq 1$), ed è certamente $\nu = 2$. Se h_1 è > 1, il punto i_1-plo o è a distanza finita dal

punto j-plo ovvero s'è indefinitamente avvicinato al punto i_1-plo. In entrambi i casi questi tre punti individuano una trasformazione quadratica che li ha come fondamentali, e dessa abbassa l'ordine n. Se poi $h_1 = 1$, ma esiste qualcuno dei punti h_k-pli il quale sia a distanza finita dal punto j-plo ovvero sia punto satellite del punto i_1-plo, la stessa conclusione si può trarre. Essa non si può più trarre quando tutti i punti h_k-pli fossero semplici ed infinitamente vicini al punto i_2-plo (qui semplice): denotando con s il loro numero, deve essere, per le relazioni (1), (2):

$$(2\rho - 1)^2 = (\rho - 1)^2 + \rho^2 + s$$

$$6\rho - 1 = \rho - 1 + \rho + s,$$

laonde

$$2\rho(\rho - 3) = 0.$$

Da questa, essendo $\rho > 0$, si ha $\rho = 3$, laonde $n = 5$, $j = 3$, $i_1 = 2$, $s = 12$. Il nostro fascio deve dunque essere un fascio di curve di 5° ordine, avente un punto, 1, come base triplo ed a questo infinitamente vicino un punto, 2, come base doppio, ed inoltre avente dodici punti base semplici, 3, 4, 5, ..., 14, tali che, per $2 < s < 14$, il punto $s + 1$ è satellite di s e che il punto 3 è satellite di 1.

Se i punti 1, 3, 4 non sono in linea retta, esiste la trasformazione Cremoniana di 3° ordine di cui la rete omaloidica ha un punto base doppio in 1 e punti base semplici in 2, 3, 4, 5, e questa abbassa l'ordine del fascio. Invece non esiste alcuna trasformazione Cremoniana che abbassi l'ordine, quando 1, 3, 4 sono in linea retta (*). In tal caso soltanto dunque il fascio di 5° ordine è d'ordine minimo. Tal fascio verrà denotato col simbolo

$$(C_5) \equiv (1^3, 2^2, 3, 4, 5, \ldots, 14)_5;\ [(1, 2), (1, 3, 4, \ldots, 14), (1, 3, 4)_1].$$

(*) Jung: loc. cit., Mem. II, § 7. Togliendo dal fascio (C_5) i punti base 11, 12, 13, 14, si ottiene un sistema lineare ∞^3 d'ordine minimo già incontrato dal sig. Bertini (loc. cit., n° 9).

2° Caso: $2j-n=2$. In tal caso, posto $j=\rho$, si ha $n=2\rho-2$ e la (14) dà:

$$0 \geqq \rho(\rho-2-i_1),$$

perciò $\rho-2-i_1 \leqq 0$ (essendo $\rho>0$). Ma si sa dover essere $\rho-2-i_1 \geqq 0$, quindi $\rho-2-i_1=0$, cioè $i_1=\rho-2$. Ma allora è $i_2 \leqq 2$.

Osservando che, per ipotesi, $h_i \leqq i_2$ e che risultò $i_2 \leqq 2$, se è $i_2=2$, denotisi con p_2-1 il numero delle h che hanno il valor 2, e con p_1 il numero di quelle che sono eguali ad 1; se poi $i_2=1$, poniamo $p_2=0$ e con p_1-1 denotiamo il numero delle h (tutte eguali ad 1). In ogni caso, si avranno le due equazioni [provenienti da (1), (2)]:

$$2\rho^2-4\rho=4p_2+p_1$$

$$4\rho-2=2p_2+p_1,$$

dalle quali:

$$p_2=\rho^2-4\rho+1$$

$$p_1=12\rho-2\rho^2-4.$$

Da queste, dovendo essere $p_1 \geqq 0$, $p_2 \geqq 0$, ricavasi $6>\rho>3$, e quindi si hanno i due casi $\rho=4$, $\rho=5$. Il 1° caso dà $n=6$, $j=4$, $i_1=2$, $p_2=1$, $p_1=12$, cioè un fascio di curve di 6° ordine con un punto base quadruplo, due punti base doppi ad esso infinitamente vicini e 12 punti base semplici.

Questi o sono a distanza finita dal punto quadruplo od infinitamente vicini a qualcuno dei punti base doppi. In ogni caso, c'è sempre una trasformazione quadratica che abbassa l'ordine del fascio (*). Il 2° caso ($\rho=5$) dà $n=8$, $j=5$, $i_1=3$, $p_2=6$, $p_1=6$,

(*) Togliendo invece i 12 punti base semplici, si ottiene un sistema ∞^{11} di ne minimo (cfr. Guccia: *Due sistemi*, etc., loc. cit.).

ossia un fascio di curve di 8° ordine con un punto base quintuplo uno triplo, 6 doppi e 6 semplici. Comunque si dispongano fra di loro infinitamente vicini i punti base di questo fascio, si vede che si può sempre abbassarne l'ordine mediante una trasformazione quadratica. Difatti, se qualcuno dei punti doppi è a distanza finita dal punto quintuplo, la trasformazione quadratica che ha come fondamentali tal punto ed i punti quintuplo e triplo esiste ed abbassa l'ordine. Se poi tutti i punti doppi cadono sul punto quintuplo allora o ce n'è qualcuno che s'è prima avvicinato al punto triplo ovvero c'è un punto doppio infinitamente vicino al quintuplo (separatamente dal triplo) e tutti gli altri punti doppi sono infinitamente vicini ad esso (succedendosi l'uno all'altro in un certo ordine). In ognuno di tali casi, esiste evidentemente una trasformazione quadratica che ha la proprietà di abbassare l'ordine del fascio.

La discussione precedente porta dunque al seguente lemma:

Se i tre punti base di moltiplicità più elevata di un fascio di curve piane di genere 2 e d'ordine n hanno la somma delle loro moltiplicità $> n$, comunque poi siano legati fra loro, esiste sempre una trasformazione Cremoniana che, applicata al fascio, ne abbassa l'ordine, escluso il caso di un fascio

$$(C_5) \equiv (1^3, 2^2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, \ldots, 14)_5;$$
$$[(1, 2), (1, 3, 4, \ldots, 14), (1, 3, 4)_1],$$

cioè d'un fascio di curve di 5° ordine dotate d'un punto, 1, *base triplo, un punto,* 2, *base doppio, infinitamente vicino ad* 1, *e dodici punti base semplici,* 3, 4, 5, ..., 14, *di cui* 3 *è infinitamente vicino ad* 1, 4 *a* 3, 5 *a* 4, *etc., e tali che* 1, 3, 4 *sono in linea retta.*

L'esistenza di questo fascio sarà accertata più oltre.

2. Dal momento che un fascio di curve di genere 2 e d'ordine n ha necessariamente almeno tre punti base, e che, quando la somma delle tre moltiplicità più elevate $(r_1 + r_2 + r_3)$ è $> n$, l'ordine n può sempre abbassarsi mediante una trasformazione quadratica, esclusion fatta del fascio (C_5) del n° precedente, segue che la ricerca dei tipi dei fasci di curve piane di genere 2, si può far dipendere

[escludendo i fasci equivalenti al (C_5) predetto] dalla ricerca dei fasci di curve d'ordine n e genere 2 in cui è

$$r_1 + r_2 + r_3 \leqq n. \tag{15}$$

Suppongasi adunque d'avere un fascio di curve di genere 2 e d'ordine n per cui valga la (15).

Dalla (1) e dalla (2) del n° 1 si ricava:

$$r_3 \sum_{i=4}^{s} r_i - \sum_{i=4}^{s} r_i^2 = n(3r_3 - n) - r_3(r_1 + r_2 - 2) + r_1^2 + r_2^2. \tag{16}$$

Il primo membro di questa è, per le (6), $\geqq 0$, ed è $= 0$ solo nel caso in cui sia

$$r_3 = r_4 = r_5 = \dots = r_s. \tag{17}$$

Quindi è

$$n(3r_3 - n) - r_3(r_1 + r_2 - 2) + r_1^2 + r_2^2 \geqq 0, \tag{18}$$

ove il segno d'uguaglianza può sussistere solo nel caso in cui siano verificate le (17). Per le (6) e la (15) è $3r_3 \leqq n$, quindi dalla diseguaglianza precedente e dalle (15) si trae facilmente:

$$(r_1 + r_2 + r_3)(2r_3 - r_1 - r_2) - r_3(r_1 + r_2 - 2) + r_1^2 + r_2^2 \geqq 0,$$

ossia, sviluppando e dividendo per 2,

$$r_3(r_3 + 1) - r_1 r_2 \geqq 0. \tag{19}$$

Qui abbiamo da considerare due casi:

1° Caso.—Sia

$$r_3(r_3 + 1) - r_1 r_2 = 0.$$

Allora, dovendo essere $r_1 \geqq r_2 \geqq r_3$, si vede che deve essere necessariamente $r_1 - 1 = r_2 = r_3$. Nel nostro caso inoltre, in (18)

...o =, quindi valgono le (17). In complesso, dev'essere:

$$r_1 - 1 = r_2 = r_3 = \ldots = r_s = \rho,$$

...o un numero intero e >0. Inoltre la stessa (18) dà $... = n$.

...a (2) del n° 1 dà allora:

$$s\rho + 1 = 9\rho + 5$$

...a

$$(s - 9)\rho = 4.$$

Si può in tre modi soddisfare con numeri interi a quest'equazione. Si hanno le soluzioni:

$$(a) \qquad s = 13, \qquad \rho = 1$$

$$(b) \qquad s = 11, \qquad \rho = 2$$

$$(c) \qquad s = 10, \qquad \rho = 4.$$

La soluzione (*a*) offre $n = 4$, $r_1 = 2$, $r_2 = r_3 = \ldots = r_{13} = 1$, cioè un fascio di curve di 4° ordine con un punto base doppio e con 12 punti base semplici, fascio che indicheremo con

$$(C_4) \equiv (1^2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13)_4.$$

La (*b*) offre $n = 7$, $r_1 = 3$, $r_2 = r_3 = \ldots = r_{11} = 2$ cioè un fascio di curve di 7° ordine con un punto base triplo ed altri 10 punti base doppi. Questo fascio si denoterà con

$$(C_7) \equiv (1^3,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 7^2,\ 8^2,\ 9^2,\ 10^2,\ 11^2)_7.$$

La (*c*) finalmente offre $n = 13$, $r_1 = 5$ $r_2 = r_3 = \ldots = r_{10} = 4$, cioè un fascio di curve di 13^{mo} ordine con un punto quintuplo e

nove punti quadrupli. Tal fascio si denoterà con

$$(C_{13}) \equiv (1^5,\ 2^4,\ 3^4,\ 4^4,\ 5^4,\ 6^4,\ 7^4,\ 8^4,\ 9^4,\ 10^4)_{13}.$$

2° Caso. — Sia invece:

$$r_3(r_3 + 1) - r_1 r_2 > 0.$$

Questa dà necessariamente $r_1 = r_2 = r_3 = r$ (r essendo un intero > 0). Qui la (18) considerata insieme alle diseguaglianze $n - 3r \geq 0$, $r \geq 1$, dà $3r = n$. Denotiamo ora con p_0 il numero di quelle r_i che sono eguali ad r ($p_0 \geq 3$), con p_1 quelle che sono eguali ad $r - 1$ ($p_1 \geq 0$), con p_2 quelle che sono eguali ad $r - 2, \ldots$, con p_{r-1} quelle che sono eguali ad 1. La (1) e la (2) divengono:

$$(20) \quad p_0 r^2 + p_1(r-1)^2 + p_2(r-2)^2 + \ldots + p_{r-1} = 9r^2$$

$$(21) \quad p_0 r + p_1(r-1) + p_2(r-2) + \ldots + p_{r-1} = 9r + 2.$$

Dalla (20) e dalla (21) ricavasi $p_0 < 9$. Sottraendo dalla (20) la (21) moltiplicata per $r - 1$, si ricava:

$$(22) \quad p_0 r - p_2(r-2) - 2p_3(r-3) - \ldots - (r-2)p_{r-1} = 7r + 2,$$

dalla quale si ha $p_0 > 7$. Quindi $p_0 = 8$. Con questo valore, la (20) e la (21) divengono:

$$(23) \qquad p_1(r-1)^2 + p_2(r-2)^2 + \ldots + p_{r-1} = r^2$$

$$(24) \qquad p_1(r-1) + p_2(r-2) + \ldots + p_{r-1} = r + 2.$$

Moltiplicando la (24) per r e sottraendo la (23),

$$p_1(r-1) + 2p_2(r-2) + 3p_3(r-3) + \ldots + (r-1)p_{r-1} = 2r.$$

o questa dalla (24) moltiplicata per 2,

$$- 1) - p_3(r-3) - \ldots - (r-3)p_{r-1} = 4,$$

laonde $p_1 > 0$. Quindi conchiudiamo che tra le r_i ve ne sono 8, e non più, eguali ad r (e queste le denotiamo con $r_1, r_2, \ldots, r_8$) e v'è inoltre una r_i, almeno, eguale ad $r - 1$. Questa possiamo denotarla con r_9. Tutte le altre r_i sono $< r$. Le (1) e (2) del n° 1 divengono allora:

$$\sum_{i=10}^{s} r_i^2 = 2r - 1 \tag{25}$$

$$\sum_{i=10}^{s} r_i = 3. \tag{26}$$

Ora le soluzioni di quest'ultima equazione sono in numero finito e sono:

$$r_{10} = r_{11} = r_{12} = 1 \tag{d}$$

$$r_{10} = 2, \quad r_{11} = 1 \tag{e}$$

$$r_{10} = 3. \tag{f}$$

La (*d*) dà [per la (25)] $2r - 1 = 3$, laonde $r = 2$. Quindi $n = 6$, $r_1 = r_2 = \ldots = r_8 = 2$, $r_9 = r_{10} = r_{11} = r_{12} = 1$. Essa fornisce un fascio di curve di 6° ordine del tipo:

$$(C_6) \equiv (1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 7^2,\ 8^2,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12)_6.$$

La (*e*) dà, similmente, $2r - 1 = 5$, laonde $r = 3$. Quindi $n = 9$, $r_1 = r_2 = \ldots = r_8 = 3$, $r_9 = r_{10} = 2$, $r_{11} = 1$. Essa fornisce un fascio di curve di 9° ordine del tipo:

$$(C_9) \equiv (1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3,\ 5^3,\ 6^3,\ 7^3,\ 8^3,\ 9^2,\ 10^2,\ 11)_9.$$

Finalmente la (*f*) dà $r = 5$, e quindi:

$$n = 15; \quad r_1 = r_2 = \ldots = r_8 = 5; \quad r_9 = 4; \quad r_{10} = 3,$$

cioè un fascio:

$$(C_{15}) \equiv (1^5,\ 2^5,\ 3^5,\ 4^5,\ 5^5,\ 6^5,\ 7^5,\ 8^5,\ 9^4,\ 10^3)_{15}.$$

In conclusione:

I tipi aritmeticamente possibili dei fasci di curve piane di genere 2 (non equivalenti per trasformazioni birazionali del piano) sono:

$$(C_4) \equiv (1^2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13)_4$$

$$(C_5) \equiv (1^3, 2^2, 3, 4, 5, \ldots, 14)_5; \; [(1, 2)_1, (1, 3, 4, \ldots, 14)_1, (1, 3, 4)_1]$$

$$(C_6) \equiv (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9, 10, 11, 12)_6$$

$$(C_7) \equiv (1^3, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2)_7$$

$$(C_9) \equiv (1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^2, 10^2, 11)_9$$

$$(C_{13}) \equiv (1^5, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4, 7^4, 8^4, 9^4, 10^4)_{13}$$

$$(C_{15}) = (1^5, 2^5, 3^5, 4^5, 5^5, 6^5, 7^5, 8^5, 9^4, 10^3)_{15},$$

ove col simbolo $(1^{a_1}, 2^{a_2}, 3^{a_3}, \ldots, s^{a_s})_n$ *denotiamo un fascio di curve d'ordine* n *coi punti base* $1, 2, 3, \ldots, s$ *multipli secondo i numeri* $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_s$. *Pel fascio* (C_5), *la notazione* $[(1, 2)_1, (1, 3, 4, \ldots, 14)_1, (1, 3, 4)_1]$ *denota che il punto 2 è infinitamente vicino ad 1, che il punto 3 è infinitamente vicino ad 1; 4 a 3; 5 a 4; ..., 14 a 13 e che i punti 1, 3, 4 sono in linea retta.*

3. Adesso bisogna vedere quali di tali fasci effettivamente esistano. In quanto all'esistenza dei fasci (C_4) e (C_6), essa si dimostra immediatamente, e si trova la più generale costruzione dei due fasci, osservando che i sistemi $[C_4] \equiv [1^2]_4$ e $[C_6] \equiv [1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2]_6$ sono rispettivamente ∞^{11}, ∞^3. Pigliate due C_4 diverse o rispettivamente due C_6 diverse di tali sistemi, esse determinano due fasci (C_4), (C_6) della natura voluta.

Per dimostrare l'esistenza del fascio (C_5) (n° 2) e trovarne la costruzione più generale, supponiamo per un momento che tal fascio (C_5), esista. Togliendo i punti base 12, 13, 14, si ottiene una rete $[C_5]$. Questa rete è tale che, imponendo alle sue curve di passare

per il punto 12 infinitamente vicino ad 11, restano determinati due altri punti base 13, 14, infinitamente vicini a 12. Dico che questa è proprietà di qualunque rete $[C_5] \equiv [1^3, 2^2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11]_5$ che abbia i punti base addensati come i precedenti, cioè che abbia il punto 2 satellite di 1, 3 di 1, 4 di 3, 5 di 4, ..., 11 di 10, ed i punti 1, 3, 4 in linea retta. Difatti, quando io impongo alle curve di $[C_5]$ il punto base 12 infinitamente vicino ad 11, tra le curve del fascio che così verrò a determinare c'è la retta $(1, 3, 4)_1$ contata 5 volte. Questo vedesi subito, considerando, invece che $[C_5]$, una rete $[C_7]$, trasformata di $[C_5]$ mediante una trasformazione quadratica che abbia un punto fondamentale nel punto 1 e gli altri punti fondamentali generici. Ora, siccome la retta $(1, 3, 4)_1$ contata 5 volte è una curva *totale* del fascio (C_5) così ottenuto e non ha intersezioni con un'altra C_5 del fascio a distanza finita da 1, così il fascio (C_5), staccato dalla rete data, imponendo il punto base 12 satellite di 11, ha gli altri due punti base 13, 14 a distanza infinitesima da 1 e si vede subito (è meglio per questo riferirsi al fascio staccato dalla rete $[C_7]$) che il punto 13 è satellite di 12 e 14 di 13.

Quindi il fascio (C_5) esiste e la costruzione precedente è la più generale.

Passiamo ora alla

Discussione del fascio (C_7). — Consideriamo il sistema delle curve di 4° ordine aggiunte a (C_7) (n° 2): esso è un fascio. Facciamo dapprima l'ipotesi che tal fascio sia irreducibile. Dico che ciò non può essere. Difatti, se le C_4 generiche aggiunte a (C_7) sono irreducibili, costituiscono un fascio di curve di genere 2, e precisamente:

$$(C_4) \equiv (1^2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13)_4,$$

essendo 12 e 13 due certi punti del piano.

Qua però si può far l'obbiezione che, quando i punti base 1, 2, ..., 11 fossero (tutti od alcuni) infinitamente vicini, potrebbero forse le C_4 acquistare qualche moltiplicità più elevata in qualcuno di essi e perciò [tuttochè fosse (C_4) irreducibile] potrebbero non essere più le C_4 di genere 2. Ma è chiaro che in tal caso si può, mediante una trasformazione quadratica, portare (C_7) in un (C_7)

della stessa natura avente riducibile il sistema aggiunto (di 4° ordine). Escludendo quindi il caso che il (C_7) possa mediante trasformazioni Cremoniane ridursi ad un (C_7) le cui aggiunte di 4° ordine siano riducibili, abbiamo che il sistema aggiunto (C_4) è quello che abbiamo già scritto.

Le C_7 secano le C_4 in gruppi dell'unica g^1_2 esistente su una C_4, quindi i gruppi di punti secati sulle C_4 da una C_7 (o viceversa) sono allineati col punto 1. In altri termini, le rette per 1 secano una C_7 in 4 punti che constano di due gruppi dell'unica g^1_2 su C_7. Per ognuno di questi gruppi passa una C_4. Fissata quindi una C_7, facciamo corrispondere ad ogni retta del fascio di centro 1 la coppia di curve C_4 che passano per i due gruppi della g^1_2 secati su C_7 dalla retta data. In tal guisa, determiniamo una proiettività tra le rette del fascio $(1)_1$ e coppie di curve di (C_4) che costituiscono entro la forma fondamentale *fascio* una involuzione di 1ª specie e 2° grado. In altri termini, otteniamo una corrispondenza proiettiva tra il fascio di rette $(1)_1$ ed un fascio riducibile di curve di 8° ordine:

$$(C_8) \equiv (1^4,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 7^2,\ 8^2,\ 9^2,\ 10^2,\ 11^2,\ 12^2,\ 13^2)_8.$$

Il luogo dei punti comuni a curve corrispondenti di tali due fasci proiettivi è una

$$C_9 \equiv (1^{5+\varepsilon_1},\ 2^{2+\varepsilon_2},\ 3^{2+\varepsilon_3},\ 4^{2+\varepsilon_4},\ \ldots,\ 10^{2+\varepsilon_{10}},\ 11^{2+\varepsilon_{11}},\ 12^{2+\varepsilon_{12}},\ 13^{2+\varepsilon_{13}})_9$$
$$(\varepsilon_i \geq 0)$$

dalla quale deve staccarsi C_7. Resta una

$$C_2 \equiv (1^{2+\varepsilon_1},\ 2^{\varepsilon_2},\ 3^{\varepsilon_3},\ \ldots,\ 10^{\varepsilon_{10}},\ 11^{\varepsilon_{11}},\ 12^{2+\varepsilon_{12}},\ 13^{2+\varepsilon_{13}})_2.$$

Per l'irreducibilità di (C_4), ricavasi $\varepsilon_i = 0$ e la conica C_2 è una retta, $(1,\ 12,\ 13)_1$, doppia. Questa non può contenere altri punti base, ed è fondamentale per (C_4). La sua residua rispetto a questo è una $C_3 \equiv (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11)_3$. Ma questa non può esistere, se (C_7) è irreducibile.

Resta quindi da far l'ipotesi che il fascio (C_7) abbia l'aggiunto

riducibile (perchè sopra s'è visto che sempre a questo possiamo ridurci, quando le C_4 aggiunte abbiano il genere < 2).

Tale riducibilità può avvenire solamente per la presenza di parti fisse in ogni C_4 aggiunta; ciò perchè, se una C_4 aggiunta a (C_7) si componesse di due parti variabili (in un fascio), ognuna di queste secherebbe necessariamente in *un* punto ogni C_7, e quindi le C_7 sarebbero razionali. La parte fissa comune a tutte le C_4 aggiunte dev'essere (per la stessa ragione) fondamentale per (C_7) e d'ordine < 4. Si vede subito che la parte variabile dell'aggiunto a (C_7) non può essere nè una conica nè una retta (come si vede contandosene le intersezioni colle C_7, in tutti i possibili casi), quindi dev'essere una cubica. Sicchè le curve dell'aggiunto (C_4) di (C_7) si devono comporre d'una retta fissa e di una curva C_3 variabile in un fascio.

La retta fissa, essendo fondamentale per (C_7), deve contenere il punto 1 e due altri punti base, p. e., 2 e 3. Quindi i punti 1, 2, 3 sono allineati ed i punti 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 sono punti base d'un fascio di cubiche

$$(C_3) \equiv (1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)_3.$$

Queste cubiche sono certamente ellittiche [anche se alcuni o tutti i punti base del sistema (C_7) fossero infinitamente vicini], ciò perchè un fascio di curve (in particolare cubiche) razionali ha la sovrabbondanza nulla, quindi se esistesse un punto base doppio, esso e gli altri punti base sarebbero punti base di (C_7) e ci sarebbe una trasformazione quadratica portante (C_7) in un (C_7) ed il fascio (C_3) in un (C_2), e ciò, come s'è visto, è impossibile.

Ciò posto, consideriamo la curva di (C_7) che contiene la retta $(123)_1$. La residua di questa retta sarà una

$$C_6 \equiv (1^2, 2, 3, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2)_6.$$

Questa è certamente l'insieme di due C_3:

$$C_3' \equiv (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)_3$$

$$C_3'' \equiv (1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)_3,$$

le quali, essendo il fascio (C_7) irreducibile, sono necessariamente distinte. Dunque nel fascio (C_7) c'è una curva composta:

$$C'_7 \equiv (1, 2, 3)_1 \quad (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)_3$$
$$(1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)_3.$$

Consideriamo una C_3 qualunque del fascio $(1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)_3$. Essa viene secata dal fascio (C_7) secondo una g^1_2. Le coppie di questa g^1_2 su questa cubica ellittica C_3 sono allineate con un punto fisso di C_3. Dal momento che tra le C_7 c'è la C'_7, il punto fisso su C_3 è il punto 1. Quindi *le coppie di punti secate dalle* C_7 *sulle* C_3 (o viceversa) *sono allineate con* 1.

Consideriamo una C_7 e la serie g^1_4 secata su di essa dalle rette per 1. Ogni gruppo della g^1_4 si compone, per ciò che s'è detto, di due coppie della g^1_2 esistente su C_7 (la quale g^1_2 è unica e perciò è quella secata dalle C_3). Considerando la curva $C'_3 \equiv (1, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)_3$, il gruppo della g^1_2 secato da essa su C_7 consta di due punti riuniti nel punto 2, e quindi la C'_3 ha, nel punto 2, due intersezioni riunite colla retta $(1, 2, 3)_1$, quindi la tocca in 2, od, in particolare, ha ivi punto doppio. Quest'ultimo caso è da escludere, per l'irreducibilità di (C_7).

Quindi la C'_3 deve *toccare* la retta $(1, 2, 3)_1$ nel punto 2. Similmente mostrasi che la $C''_3 \equiv (1, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11)_3$ deve *toccare* la retta $(1, 2, 3)_1$ nel punto 3.

Fissata una C_7, si può stabilire una proiettività fra il fascio di rette per 1 e certe coppie di curve C_3 [costituenti entro al fascio (C_3) una g^1_2], facendo corrispondere ad ogni retta per 1 la coppia di curve C_3 che tagliano la C_7 nelle 2 coppie in cui sappiamo che si scindono i quattro punti sezioni della retta con C_7. In questa proiettività, alla retta $(1, 2, 3)_1$ deve corrispondere la coppia di cubiche C'_3, C''_3.

Quindi:

Se esiste il fascio $(C_7) \equiv (1^3, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2)_7$, *esso deve potersi con una trasformazione quadratica ricondurre ad un fascio* (C_7), *della stessa natura, in cui:*

(*a*) *i punti* 1, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 *sono punti base d'un fascio di cubiche* (C_3);

(*b*) *i punti* 1, 2, 3 *sono allineati, ed i punti* 2, 3 *sono punti ove la retta* $(1, 2, 3)_1$ *è toccata da due cubiche del fascio* (C_3).

(*c*) *Inoltre, per ogni* C_7, *esiste una corrispondenza proiettiva tra le rette per* 1 *e certe coppie di curve del fascio* (C_3) (costituenti entro al fascio un'involuzione g_2^1), *in modo che la curva* C_7 *sia il luogo dei punti comuni alle rette per* 1 *ed alle corrispondenti coppie di curve* C_3. *In questa corrispondenza, alla retta* $(1, 2, 3)_1$ *deve corrispondere la coppia di curve* C_3 *toccanti* $(1, 2, 3)_1$ (*nei punti* 2 *e* 3).

Noi mostreremo che, viceversa, si può costruire, mediante la proprietà (*c*), un fascio irreducibile (C_7) del tipo voluto, ove siano verificate le ipotesi (*a*) e (*b*).

Perciò nel piano assumiamo un sistema di coordinate proiettive (x_1, x_2, x_3), in guisa che la retta $(1, 2, 3)_1$ sia la retta $x_1 = 0$, ed in guisa che i punti 1, 2, 3 (che supponiamo due a due distinti) abbiano rispettivamente le coordinate (0, 1, 1), (0, 0, 1), (0, 1, 0).

Le curve C_3', C_3'' hanno per equazioni:

$$\begin{aligned} C_3' \equiv\ & a_1 x_3^2 x_1 + x_3(b_1 x_1^2 + b_2 x_1 x_2 + b_3 x_2^2) \\ & + c_1 x_1^3 + c_2 x_1^2 x_2 + c_3 x_1 x_2^2 + c_4 x_2^3 = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} C_3'' \equiv\ & \alpha_1 x_2^2 x_1 + x_2(\beta_1 x_1^2 + \beta_2 x_1 x_3 + \beta_3 x_3^2) \\ & + \gamma_1 x_1^3 + \gamma_2 x_1^2 x_3 + \gamma_3 x_1 x_3^2 + \gamma_4 x_3^3 = 0, \end{aligned}$$

colle condizioni:

$$(s) \qquad b_3 + c_4 = 0$$

$$(t) \qquad \beta_3 + \gamma_4 = 0,$$

ed è da notare che dobbiamo supporre $a_1 \neq 0$, $\alpha_1 \neq 0$ (perchè le cubiche C_3', C_3'' non devono aver punto doppio nei punti 2, 3).

Il fascio di rette per 1 può scriversi:

$$(27) \qquad x_1 + \mu(x_2 - x_3) = 0,$$

mentre la nostra involuzione di coppie di curve C_3 (appartenenti al

fascio $C_3' + \lambda C_3'' = 0$), le cui coppie corrispondono nel modo anzidetto alle rette per 1, si può scrivere:

$$C_3' C_3'' + \mu (C_3' + g C_3'')(C_3' + b C_3'') = 0. \tag{28}$$

La curva generata dai due fasci proiettivi (27), (28) è una C_7 di equazione:

$$C_7 \equiv x_1 (C_3' + g C_3'')(C_3' + b C_3'') - (x_2 - x_3) C_3' C_3'' = 0.$$

Questa ha, in generale, in 2 ed in 3 un punto semplice ed ivi per tangente la retta $(23)_1$. Però, se vogliamo che essa abbia un punto doppio in 2 ed in 3, bisogna che si abbia:

$$\gamma_4 (a_1 + \gamma_4) = 0$$

$$c_4 (\alpha_1 - g b c_4) = 0.$$

Le soluzioni $\gamma_4 = 0$, $c_4 = 0$ di queste sono da scartarsi, perchè, badando alla (t) ed alla (s) rispettivamente, si otterrebbe una C_7 contenente la retta $x_1 = 0$.

Dobbiamo quindi fare:

$$a_1 + \gamma_4 = 0 \tag{u}$$

$$\alpha_1 - g b c_4 = 0, \tag{v}$$

le quali forniscono valori non nulli per γ_4, c_4. Verificando a queste, si ottiene una C_7 che ha in 1 punto triplo ed in 2 e 3 punti doppi. Inoltre essa ha punti doppi nei punti 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, che, oltre ad 1, costituiscono la base del fascio $C_3' + \lambda C_3'' = 0$. La C_7 così ottenuta non contiene chiaramente come parte nè la retta $x_1 = 0$, nè le cubiche C_3', C_3''. Accoppiandola alla curva composta $x_1 C_3' C_3'' = 0$, si determina un fascio:

$$(C_7) \equiv (1^3, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2)_7.$$

Questo è irreducibile, perchè nè ha parti fisse, nè la sua curva generica si può comporre di più curve d'uno stesso fascio (*).

Dunque:

Il fascio (C_7) *esiste e la costruzione precedente è la più generale.*

DISCUSSIONE DEL FASCIO (C_9). Ammettiamo per un momento l'esistenza e l'irreducibilità del fascio

$$(C_9) \equiv (1^3,\ 2^3,\ 3^3,\ 4^3,\ 5^3,\ 6^3,\ 7^3,\ 8^3,\ 9^2,\ 10^2,\ 11)_9.$$

Consideriamo le due cubiche $C_3' \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)_3$, $C_3'' \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10)_3$. Supponiamo per il momento:

1° Che i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 siano fra loro a distanza finita;

2° Che le cubiche C_3', C_3'' siano irreducibili. Queste restrizioni verranno tolte in seguito.

Le cubiche C_3', C_3'' sono distinte, per l'irreducibilità di (C_9), inoltre, per la stessa ragione, non possono aver punto doppio in nessuno dei punti 1, 2, 3, ..., 11. Esse secano le C_9, fuori dei punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, in un punto. Tal punto non può esser variabile, perchè altrimenti la corrispondente curva C_3' (o C_3'') avrebbe un punto doppio e la C_9 passante per tal punto conterrebbe come parte la C_3' (o la C_3''), il che contraddice al fatto che C_3' (o C_3'') è secata in un punto variabile dalle C_9. Dunque l'ulteriore punto d'intersezione delle C_9 colle curve C_3', C_3'' dev'essere un punto base (diverso da 1, 2, ..., 10) e quindi il punto 11. Si conchiude che i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11 sono i punti base d'un fascio di cubiche che denotiamo:

$$(C_3) \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11)_3.$$

La cubica $C_3' \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11)_3$, fondamentale per il fascio (C_9), ha, rispetto a questo, una curva residua

$$C_6' \equiv (1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 7^2,\ 8^2,\ 9,\ 10^2)_6.$$

(*) La (u) e la (v) determinano, in un numero ∞^1 di modi, l'involuzione nel fascio $C_3' + \lambda C_3'' = 0$ e la proiettività dei gruppi di questa col fascio di rette per 1. In corrispondenza, si ottengono tutte le C_7 del fascio.

Similmente la residua di $C_3'' \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11)_3$ è una

$$C_6'' \equiv (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10)_6.$$

Consideriamo il fascio di curve di 6° ordine aggiunte a (C_9). Esso dev'essere un fascio:

$$(C_6) \equiv (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9, 10 \ldots)_6.$$

Ma in (C_6) sono contenute la C_6' e la C_6'', quindi il fascio (C_6) ha un punto base $9'$ infinitamente vicino a 9 ed un punto base $10'$ infinitamente vicino a 10. I punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 sono punti base d'un fascio di curve di 6° ordine con 9 punti doppi (fascio d'Halphen) (*) e similmente i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10.

Resta a discutere il caso in cui la C_3' (o la C_3'') da noi considerata si spezzi. Anzitutto, nel caso in cui più punti base di (C_9) fossero infinitamente vicini, potrebbe la C_3' (o la C_3'') forse acquistare qualche punto doppio, in un punto ove succedesse un tale addensamento di punti base. Ma allora è chiaro che si può, con una trasformazione quadratica, passare dal fascio (C_9) ad un fascio (C_9) dello stesso tipo, in guisa che a C_3' (od a C_3'') corrisponda una conica [mantenendosi di ordine $\leqq 3$ l'altra curva C_3'' (o C_3')]. Sicchè siamo condotti a studiare il caso in cui qualcuna delle due curve C_3', C_3'', p. e., $C_3' \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)_3$, si spezzi. È chiaro che lo spezzamento può avvenire soltanto con curve di questi tre tipi:

o

$$C_3' \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6)_2 (7, 8, 9)_1,$$

ovvero

$$C_3' \equiv (1, 2, 3)_1 (4, 5, 6, 7, 8, 9)_2,$$

(*) Per la costruzione e le proprietà di tal fascio, vedasi Halphen: *Sur les courbes planes du sixième degré à neuf points doubles* (Bull. de la Soc. Math. de France, t. X, pag. 162).

ovvero

$$C_3' \equiv (1, 2, 3)_1 (4, 5, 6)_1 (7, 8, 9)_1.$$

In ognuno di questi tre casi si vede facilmente che *tutta* la curva C_3' deve far parte di *una* curva C_9 e questo basta per proseguire la discussione precedente.

Quindi:

Se esiste il fascio (C_9), *i punti* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11 *sono punti base di un fascio di cubiche, mentre i punti* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 *ed i punti* 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10 *sono rispettivamente le basi di due fasci di curve di 6° ordine con nove punti doppi (fasci d'Halphen).*

Il fascio (C_9) *deve contenere due curve spezzate: una la*

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11)_3 (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9, 10^2)_6;$$

l'altra la

$$(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11)_3 (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10)_6.$$

In base a questi dati, possiamo passare alla più generale costruzione del fascio (C_9).

Si assumano nel piano, ad arbitrio, 8 punti, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, in maniera però che il fascio di cubiche per essi sia irreducibile, e sia 11 l'ulteriore punto base del fascio di cubiche. Considerisi il luogo Γ (di 9° ordine con punti tripli in 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8) (*) del 9° punto base dei fasci di curve di 6° ordine con 9 punti doppi, dei quali 8 siano nei punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8. Su questo luogo piglisi il punto 9, ed indi il punto 10, il quale sia fuori della cubica $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)_3$. Si suppone inoltre che il punto 10 non si scelga in guisa che le curve

$$C_6' \equiv (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10)_6$$
$$C_6'' \equiv (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9, 10^2)_6$$

(*) Halphen, loc. cit.

abbiano qualche curva comune. Questo si può sempre ottenere: basta pigliare, p. e., il punto 10 in guisa che sia irreducibile la curva C'_6 ed in guisa che 10 sia fuori dei dodici punti doppi (diversi dai punti base) di curve (particolari) del fascio $(1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2)_6$.

Denotando con C'_3, C''_3 rispettivamente le cubiche $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11)_3$ ed $(1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11)_3$, è chiaro che il fascio

$$C'_3\, C''_6 + \lambda\, C''_3\, C'_6 = 0$$

è un fascio

$$(C_9) \equiv (1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^2, 10^2, 11)_9;$$

esso è irreducibile, ed è il più generale fascio (C_9) di tal tipo.

Abbiamo così dimostrata l'esistenza dei fasci (C_4), (C_5), (C_6), (C_7), (C_9), dando inoltre per essi le costruzioni più generali.

Ora passiamo alla

Discussione del fascio (C_{15}). — Qui dimostreremo che: *il fascio*

$$(C_{15}) \equiv (1^5, 2^5, 3^5, 4^5, 5^5, 6^5, 7^5, 8^5, 9^4, 10^3)_{15}$$

non può esistere.

Supponiamo, per un momento, a distanza finita i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, e consideriamo la cubica

$$C_3 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)_3.$$

Essa non può passare per 10, per l'irreducibilità di (C_{15}), nè avere punto doppio in qualcuno dei punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 (per la stessa ragione).

Essa ha una intersezione (oltre a tali punti) colle C_{15}. Questa intersezione non può esser mobile. Difatti, in tal caso, C_3 ha almeno un punto doppio, quindi due casi sono da considerare:

1° o C_3 è irreducibile. Allora la C_{15}, passante per il punto

doppio di C_3, la contiene per intero, e questo contraddice al fatto che C_3 non è fondamentale per il fascio (C_{15}).

2° o la C_3 si spezza. Al solito, gli spezzamenti possibili sono di questa natura:

$$C_3 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6)_2 (7, 8, 9)_1$$

$$C_3 \equiv (1, 2, 3)_1 (4, 5, 6, 7, 8, 9)_2$$

$$C_3 \equiv (1, 2, 3)_1 (4, 5, 6)_1 (7, 8, 9)_1.$$

In ognuno di tali casi, si verifica che *tutta* C_3 è contenuta in una C_{15}, il che contraddice al fatto che una delle sue parti ha una intersezione variabile con le C_{15} (*).

Dunque dovrebbe l'intersezione ulteriore delle C_{15} colla C_3 essere un punto fisso ossia un punto base per C_{15} e quindi il punto 10, ma questo non può essere se (C_{15}) è irreducibile.

Resta da far l'ipotesi dell'addensamento di due o più punti base di (C_{15}). In tal caso, se la cubica $C_3 \equiv (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9)_3$ è riducibile, ovvero, pur essendo irreducibile non ha il punto doppio in uno dei punti base, il ragionamento precedente serve ancora ad escludere l'esistenza del fascio (C_{15}). Se poi un punto ove si siano addensati alcuni dei punti base è doppio per la cubica, c'è sempre una trasformazione quadratica che porta il (C_{15}) in un (C_{15}) e la cubica in una conica, ossia porta al caso in cui C_3 sia riducibile, ed il ragionamento precedente prova che (C_{15}) non può esistere. Dunque:

il fascio C_{15} *non esiste.*

Discussione del fascio (C_{13}). — Qui ci contentiamo (vedi la prefazione) di mostrare che il fascio (C_{13}) esiste.

Consideriamo in un piano π sette punti: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7

(*) Si può osservare (il che fa lo stesso) che la residua di C_3 rispetto al fascio è una C_{12} la quale è tale che ogni C_{15} la contiene. Perciò il fascio C_{15} è necessariamente riducibile. Questa osservazione giova meglio quando i punti base sieno infinitamente vicini.

di cui i punti 2, 3, 4, 5, 6, 7 stiano sopra una conica, e consideriamo la rete di curve di 3° ordine per i punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, rete che indicheremo con $[C_3]$. Si può stabilire una corrispondenza proiettiva fra le curve di $[C_3]$ e la rete delle rette di un piano π'. Facendo corrispondere ai due punti (variabili) intersezioni di due C_3 della rete il punto intersezione delle rette corrispondenti, si ha una trasformazione doppia del piano π nel piano π' (*).

La curva di diramazione del piano π' è una curva di 4° ordine C'_4 avente un punto doppio O' il quale corrisponde a tutta la conica $(2, 3, 4, 5, 6, 7)_2$ del piano π. Alle rette di π corrispondono in π' curve di 3° ordine aventi in O' un punto doppio e tangenti in 4 punti variabili alla C'_4. Al punto 1 di π corrisponde una retta di π' non passante per O' (e tangente doppia di C'_4), mentre ai punti 2, 3, 4, 5, 6, 7 corrispondono le 6 tangenti che si possono condurre da O' a C'_4. Consideriamo in π' un fascio (irreducibile) di curve di 5° ordine passanti per O semplicemente ed aventi 3 tacnodi 8′, 9′, 10′ posti su C'_4 ed aventi ivi come tangenti tacnodali le tangenti a C'_4. A tal fascio di curve corrisponde nel piano π un fascio (irreducibile) di curve di 13° ordine

$$(C_{13}) \equiv (1^5, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4, 7^4, 8^4, 9^4, 10^4)_{13},$$

ove con 8, 9, 10 abbiamo denotato i punti corrispondenti ad 8′, 9′, 10′.

E con ciò è dimostrata l'esistenza del fascio (C_{13}).

Quindi si può conchiudere:

I tipi (non equivalenti per trasformazioni birazionali del piano) dei fasci di curve di genere 2 sono:

$$(a) \qquad (C_4) \equiv (1^2, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13)_4$$

(*) Per lo studio delle trasformazioni doppie, vedasi De Paolis: *Le trasformazioni piane doppie* (Atti della R. Accademia dei Lincei, 1877), mentre per la loro classificazione in tipi vedasi: Clebsch: *Ueber den Zusammenhang einer Classe* etc. (Math. Ann., Bd. 3), Noether: *Ueber die ein-zweideutigen Ebenentransformationen* (Sitzungsberichte der phil. med. Soc. zu Erlangen, 1878) e Bertini: *Deduzione delle trasformazioni piane doppie dai tipi fondamentali delle involutorie* (Rend. del R. Ist. Lombardo, t. XXII$_2$).

(*b*) $$(C_5) \equiv (1^3, 2^2, 3, 4, 5, \ldots, 14)_5;$$
$$[(1, 2), (1, 3, 4, 5, \ldots, 14), (1, 3, 4)_1] \ (^*)$$

(*c*) $$(C_6) \equiv (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9, 10, 11, 12)_6$$

(*d*) $$(C_7) \equiv (1^3, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2)_7$$

(*e*) $$(C_9) \equiv (1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^2, 10^2, 11)_9$$

(*f*) $$(C_{13}) \equiv (1^5, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4, 7^4, 8^4, 9^4, 10^4)_{13}.$$

La costruzione più generale dei fasci (*a*), (*b*), (*c*), (*d*), (*e*) è quella precedentemente data.

Palermo, agosto 1898.

MICHELE DE FRANCHIS.

ERRATA-CORRIGE.

A tutto il brano che va dall'ultimo rigo di pag. 6 al rigo 9° di pag. 7, sostituiscasi il seguente:

Sicchè tutte le b sono eguali ad 1, e, denotando con s il loro numero, deve essere, per le relazioni (1), (2):

(*) Per la spiegazione di questi simboli vedasi il n° 2 (ultimo enunciato).

SULL'EQUILIBRIO DELLE RETI.

Memoria del Dr. **Ermenegildo Daniele**, in Torino.

Adunanza del [illegible] novembre [illegible].

I.

Una superficie flessibile ed inestendibile si definisce come una superficie capace di deformarsi in modo che ogni suo elemento lineare (e quindi ogni segmento finito di linea) si mantenga di lunghezza costante. Facendo uso delle solite notazioni della teoria delle superficie, riferendola ad un sistema di linee coordinate u, v sulla superficie, si ha come espressione del quadrato dell'elemento lineare

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$

e la condizione di inestendibilità si esprime analiticamente colle equazioni

$$E = \text{cost.}, \qquad F = \text{cost.}, \qquad G = \text{cost.},$$

od anche

$$\delta E = 0, \qquad \delta F = 0, \qquad \delta G = 0.$$

Supponiamo ora che una tal superficie perda la proprietà dell'inestendibilità per ogni sua linea eccetto che per le linee coordi-

nate; le condizioni della sua parziale inestendibilità saranno espresse, evidentemente, dalle equazioni:

$$E = \text{cost.}, \qquad G = \text{cost.},$$

oppure:

$$\delta E = 0, \qquad \delta G = 0.$$

A differenza dunque da ciò che succede per le superficie inestendibili, il coefficiente F può variare nella deformazione: una superficie della natura di quella considerata si può chiamare una *rete.* In altre parole una rete si può definire come una superficie sulla quale esistano due famiglie di linee, tali che in ogni sua deformazione si conservino di lunghezza invariabile in ciascuna loro parte, mentre possa variare la lunghezza di ogni altra linea. Ne segue che degli infiniti elementi lineari della rete uscenti da un suo punto generico ve n'ha sempre due, e due soli, distinti che appartengono a linee inestendibili; e si è detto « uscenti da un punto generico », potendovi essere dei punti eccezionali per ciascuno dei quali accada che più di due, o anche tutti gli elementi uscenti da esso siano inestendibili. Le linee inestendibili di una rete si possono chiamare i suoi *fili;* risulta poi che le condizioni di inestendibilità di una rete,

$$\delta E = 0, \qquad \delta G = 0,$$

corrispondono al caso che la rete sia riferita ai suoi fili come linee coordinate.

II.

Le equazioni dell'equilibrio di una rete si ottengono facilmente collo stesso metodo impiegato dal prof. Beltrami (*) per dedurre le equazioni dell'equilibrio di una superficie flessibile ed inestendi-

(*) *Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili;* serie IV, tomo III delle Memorie dell'Accademia delle Scienze dell'Istituto di Bologna, 1882.

bile. Anche le equazioni che si dedurranno saranno perfettamente analoghe, nella forma, a quelle ottenute dal **Beltrami**.

Supporrò per semplicità che la densità superficiale della rete sia costante ed eguale all'unità. Detto σ il pezzo di rete che si considera e s il suo contorno, e riferendoci a tre assi x, y, z fissi nello spazio, diciamo X, Y, Z le componenti della forza unitaria applicata ad ogni elemento della rete, e X_s, Y_s, Z_s le componenti della forza unitaria applicata agli elementi del contorno. Facendo uso del principio delle velocità virtuali, e indicando con δx, δy, δz le componenti di uno spostamento virtuale, dev'essere per l'equilibrio:

$$\int_\sigma (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z)d\sigma + \int_s (X_s\delta x + Y_s\delta y + Z_s\delta z)ds = 0.$$

Per scrivere in maniera completa l'equazione simbolica dell'equilibrio dobbiamo anche tener conto delle condizioni $\delta E = 0$, $\delta G = 0$; indicando con λ e μ due fattori indeterminati, abbiamo:

$$\int_\sigma (\lambda\delta E + \mu\delta G)\frac{d\sigma}{H} = 0,$$

dove s'è posto $H = \sqrt{EG - F^2}$; od anche:

$$\int_\sigma \left(\lambda \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \delta x}{\partial u} + \mu \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \delta x}{\partial v}\right) du\, dv = 0.$$

Sommando coll'equazione precedente avremo come espressione del principio generale dell'equilibrio:

$$\int_\sigma \left(\sum X\delta x\right)d\sigma + \int_s \left(\sum X_s\delta x\right)ds$$
$$+ \int_\sigma \left(\lambda \sum \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \delta x}{\partial u} + \mu \sum \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \delta x}{\partial v}\right) du\, dv = 0.$$

Il terzo integrale del primo membro si può trasformare facendo uso di formole note.

Per questo imaginiamo di condurre in un punto qualunque della

rete la normale w; fisseremo su di essa il senso positivo in modo che un osservatore coi piedi nel punto considerato e disteso lungo la w positiva veda rotare la linea u positiva per andare a cadere sulla v positiva (*), attraverso l'angolo minore di due retti, dalla sua sinistra alla destra (cioè, secondo il modo in cui si dispongono di solito gli assi cartesiani, nello stesso senso in cui un osservatore disteso lungo l'asse z positivo coi piedi nell'origine vede rotare l'asse x, attraverso l'angolo retto, per andare a coincidere coll'asse y). Diciamo ora n la normale al contorno s diretta tangenzialmente alla superficie e internamente ad essa; se conveniamo di assumere il senso positivo su s in modo che in ogni suo punto la terna formata dalle direzioni positive della tangente a s, della normale n e della normale w sia direttamente congruente alla terna x, y, z, risulterà pure ben determinato il senso positivo sopra s. Con queste convenzioni abbiamo le seguenti formole, di cui si fa uso frequente:

$$\int_\sigma \lambda \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial \delta x}{\partial u} du\, dv = -\int_\sigma \frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda \frac{\partial x}{\partial u}\right)\delta x\, du\, dv + \int_s \lambda \frac{\partial x}{\partial u}\frac{dv}{ds}\delta x\, ds,$$

$$\int_\sigma \mu \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial \delta x}{\partial v} du\, dv = -\int_\sigma \frac{\partial}{\partial v}\left(\mu \frac{\partial x}{\partial v}\right)\delta x\, du\, dv - \int_s \mu \frac{\partial x}{\partial v}\frac{du}{ds}\delta x\, ds;$$

sostituendo nell'ultima equazione otteniamo, ricordando che è $d\sigma = H\,du\,dv$:

$$\int_\sigma \left\{ \sum \left[X - \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda \frac{\partial x}{\partial u}\right) - \frac{1}{H}\frac{\partial}{\partial v}\left(\mu \frac{\partial x}{\partial v}\right)\right]\delta x \right\} d\sigma$$
$$+ \int_s \left[\sum \left(X_s + \lambda \frac{\partial x}{\partial u}\frac{dv}{ds} - \mu \frac{\partial x}{\partial v}\frac{du}{ds}\right)\delta x \right] ds = 0,$$

ed eguagliando separatamente a zero i coefficienti di δx, δy, δz sotto i due integrali, si hanno i due sistemi di equazioni:

(*) Chiamo linee u le linee sulle quali varia la sola u, cioè le $v = \text{cost.}$; su una linea u si può fissare come senso positivo quello secondo il quale cresce la u. Analogamente si dica per le linee v.

$$
(1)\qquad \begin{cases} HX = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\lambda \dfrac{\partial x}{\partial u}\right) + \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\mu \dfrac{\partial x}{\partial v}\right) \\[2ex] HY = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\lambda \dfrac{\partial y}{\partial u}\right) + \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\mu \dfrac{\partial y}{\partial v}\right) \\[2ex] HZ = \dfrac{\partial}{\partial u}\left(\lambda \dfrac{\partial z}{\partial u}\right) + \dfrac{\partial}{\partial v}\left(\mu \dfrac{\partial z}{\partial v}\right) \end{cases}
$$

$$
(1_{,})\qquad \begin{cases} X_{,} = -\lambda \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{dv}{ds} + \mu \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{du}{ds} \\[2ex] Y_{,} = -\lambda \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{dv}{ds} + \mu \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{du}{ds} \\[2ex] Z_{,} = -\lambda \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{dv}{ds} + \mu \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{du}{ds}. \end{cases}
$$

Le $(1_{,})$ si possono mettere sotto altra forma; sommandole una prima volta dopo averle moltiplicate rispettivamente per $\dfrac{\partial x}{\partial u}$, $\dfrac{\partial y}{\partial u}$, $\dfrac{\partial z}{\partial u}$, ed una seconda dopo averle moltiplicate per $\dfrac{\partial x}{\partial v}$, $\dfrac{\partial y}{\partial v}$, $\dfrac{\partial z}{\partial v}$, si trova:

$$
(1_{,})'\qquad \begin{cases} \sum X_{,} \dfrac{\partial x}{\partial u} = -E\lambda \dfrac{dv}{ds} + F\mu \dfrac{du}{ds} \\[2ex] \sum X_{,} \dfrac{\partial x}{\partial v} = -F\lambda \dfrac{dv}{ds} + G\mu \dfrac{du}{ds}, \end{cases}
$$

oppure, risolvendo queste ultime rispetto a $\lambda \dfrac{dv}{ds}$ e $\mu \dfrac{du}{ds}$:

$$
(1_{,})''\qquad \begin{cases} \lambda \dfrac{dv}{ds} = \dfrac{1}{H^2}\left(F \sum X_{,} \dfrac{\partial x}{\partial v} - G \sum X_{,} \dfrac{\partial x}{\partial u}\right) \\[2ex] \mu \dfrac{du}{ds} = \dfrac{1}{H^2}\left(E \sum X_{,} \dfrac{\partial x}{\partial v} - F \sum X_{,} \dfrac{\partial x}{\partial u}\right); \end{cases}
$$

tanto le $(1_{,})'$ quanto le $(1_{,})''$ sono equivalenti alle $(1_{,})$.

Per una determinata configurazione di equilibrio di una rete sotto l'azione di un certo sistema di forze le (1_1) devono coesistere nelle due quantità $\lambda \frac{dv}{ds}$ e $\mu \frac{du}{ds}$ considerate come incognite, e quindi deve essere in ogni punto del contorno:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & X_1 \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & Y_1 \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & Z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Questa relazione si scrive, indicando con α, β, γ i coseni direttori della normale alla rete:

$$X_1\alpha + Y_1\beta + Z_1\gamma = 0;$$

essa dice che in una rete in equilibrio le forze applicate ai punti del contorno agiscono tangenzialmente alla rete stessa.

Alle equazioni indefinite (1) ed alle equazioni ai limiti (1_1) possiamo applicare lo stesso procedimento, usato dal Beltrami nel § 4 della sua Memoria sopra citata, per avere le componenti delle forze secondo le tangenti alle linee u e v e secondo la normale w; in tal modo siamo condotti alle equazioni:

$$(2)\qquad \begin{cases} HU = \sqrt{E}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial u} + E_1\lambda + G_1\mu\right) \\ HV = \sqrt{G}\left(\frac{\partial \mu}{\partial v} + E_2\lambda + G_2\mu\right) \\ HW = D\lambda + D''\mu \end{cases}$$

$$(2_1)\qquad \begin{cases} U_1 = -\lambda\sqrt{E}\frac{dv}{ds} \\ V_1 = \mu\sqrt{G}\frac{du}{ds} \\ W_1 = 0. \end{cases}$$

Le quantità D, D'' sono ben note nella teoria delle superficie come due dei coefficienti della seconda forma fondamentale; E_1, E_2, G_1, G_2 sono funzioni di E, F, G che si sogliono più comunemente indicare mediante i simboli di Christoffel a tre indici di 2ª specie:

$$E_1 = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{G\dfrac{\partial E}{\partial u} + F\dfrac{\partial E}{\partial v} - 2F\dfrac{\partial F}{\partial u}}{2H^2}$$

$$G_1 = \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{-F\dfrac{\partial G}{\partial v} + 2G\dfrac{\partial F}{\partial v} - G\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2H^2}$$

$$E_2 = \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{-F\dfrac{\partial E}{\partial u} + 2E\dfrac{\partial F}{\partial u} - E\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2H^2}$$

$$G_2 = \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial v} + F\dfrac{\partial G}{\partial u} - 2F\dfrac{\partial F}{\partial v}}{2H^2}.$$

L'essere $W_1 = 0$ conferma il risultato ottenuto poco sopra, che in una rete in equilibrio le forze al contorno sono tangenti alla rete. Le (2_1) mostrano inoltre che se in una rete in equilibrio il contorno è formato da un filo, le forze al contorno sono dirette, in ogni suo punto, secondo l'altro filo che passa per il medesimo punto.

III.

Quando una superficie è in equilibrio, vi ha luogo a considerare, oltre alle forze esterne applicate agli elementi superficiali, anche un altro sistema di forze che agiscono sugli elementi lineari della superficie tangenzialmente alla superficie stessa, ed esprimono l'effetto del mutuo contatto delle sue diverse parti. Queste forze interne costituiscono le cosidette *tensioni*, la cui definizione e determinazione non dipende affatto dall'estendibilità o meno della superficie.

Io mi riferirò senz'altro alla definizione che ne dà il **Beltrami** al § 6 della sua Memoria. Dato su una rete in equilibrio un elemento di linea ds, agiscono su di esso due forze tangenti alla rete, eguali ed opposte, di cui l'una ha per componenti secondo gli assi le X_1, Y_1, Z_1 date dalle (1_1) e calcolate, naturalmente, per l'elemento considerato ds, l'altra ha per componenti $-X_1$, $-Y_1$, $-Z_1$. È l'insieme di queste due forze che costituisce propriamente la tensione dell'elemento ds, ma per comodità di calcolo riesce opportuno di chiamare tensione l'una o l'altra di queste due forze, e si sceglie precisamente la seconda. Nel far ciò si deve supporre di avere assegnato su ds un senso positivo; se allora insieme a ds si considera l'elemento dn ad esso perpendicolare e diretto positivamente (*), la tensione T_1 dell'elemento ds sarà diretta in modo che faccia un angolo ottuso colla direzione positiva dell'elemento dn. Questa definizione della tensione coincide poi con quella del **Beltrami**, il quale la determina tracciando sulla superficie una linea chiusa di cui faccia parte ds, in modo che l'elemento dn positivo sia diretto internamente all'area racchiusa entro quella linea: allora la tensione T_1 *emana* dalla porzione di superficie per la quale dn è diretto all'interno.

Chiamando T_{1r} la proiezione della tensione T_1 sulla direzione r, dalle (1_1) abbiamo dunque:

$$(3)\qquad \begin{cases} T_{1x} = \lambda \dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{dv}{ds} - \mu \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{du}{ds} \\[2ex] T_{1y} = \lambda \dfrac{\partial y}{\partial u}\dfrac{dv}{ds} - \mu \dfrac{\partial y}{\partial v}\dfrac{du}{ds} \\[2ex] T_{1z} = \lambda \dfrac{\partial z}{\partial u}\dfrac{dv}{ds} - \mu \dfrac{\partial z}{\partial v}\dfrac{du}{ds}; \end{cases}$$

ricorrendo alle (2_1) avremo invece le componenti della tensione se-

(*) Il senso positivo di dn si può fissare in modo che la terna formata dalle direzioni positive di ds, di dn e di w risulti direttamente congruente alla terna x, y, z; cfr. anche il n° 2.

condo le direzioni delle linee u e v, cioè:

$$(3') \qquad \begin{cases} T_{uv} = \lambda \sqrt{E}\dfrac{dv}{ds} \\[2ex] T_{vu} = -\mu \sqrt{G}\dfrac{du}{ds}. \end{cases}$$

Le (3') applicate al contorno della regione della rete compresa fra le linee u e v positive uscenti da un punto della rete valgono a darci la definizione meccanica dei fattori λ e μ. Se difatti si considerano su quel contorno gli elementi delle linee u e v uscenti dal punto considerato, il primo supporta una tensione le cui componenti sono (vedi Beltrami, § 6):

$$T_{uu} = 0, \qquad T_{uv} = -\mu\sqrt{\frac{G}{E}},$$

e il secondo una tensione di componenti

$$T_{vu} = -\lambda\sqrt{\frac{E}{G}}, \qquad T_{vv} = 0.$$

Le $T_{uu} = 0$ e $T_{vv} = 0$ dicono che le tensioni subite dagli elementi delle linee u e v uscenti da un punto della rete sono dirette rispettivamente secondo le linee v e u. Indicando con T_u e T_v i valori assoluti di quelle tensioni si ha quindi:

$$T_{uv} = \pm T_u, \qquad T_{vu} = \pm T_v,$$

e dalle equazioni precedenti ricaviamo:

$$(4) \qquad \lambda = \mp T_v\sqrt{\frac{G}{E}}, \qquad \mu = \mp T_u\sqrt{\frac{E}{G}};$$

donde si vede che in un dato punto della rete λ e μ differiscono solo per due fattori noti dai valori delle tensioni subite dagli ele-

menti delle linee v e u rispettivamente uscenti nel senso positivo dal punto dato.

Le (4) moltiplicate membro a membro dànno:

$$(4') \qquad \lambda\mu = \pm\, T_u T_v ;$$

rimane nel secondo membro l'ambiguità del segno, perchè nelle (4) i doppi segni non si corrispondono.

Lo studio delle tensioni su una rete condurrebbe agli stessi risultati generali noti per le superficie inestendibili; potrei perciò rimettermi addirittura a ciò che si contiene nel § 7 della Memoria del Beltrami. Credo tuttavia opportuno di scrivere per il caso di una rete le equazioni relative, anche per mettere in rilievo alcune proprietà notevoli dei fili. Chiamando dt l'elemento di linea avente la stessa direzione della tensione T_s che agisce sull'elemento ds, si hanno le seguenti equazioni, che sono le analoghe delle (IV') e (11) del Beltrami:

$$(5) \qquad T_s \frac{\partial u}{\partial t} = \lambda \frac{\partial v}{\partial s}, \qquad T_s \frac{\partial v}{\partial t} = -\mu \frac{\partial u}{\partial s}$$

$$(6) \qquad \mu \frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

e queste tre equazioni insieme colla

$$E\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 + 2F\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial v}{\partial t} + G\left(\frac{\partial v}{\partial t}\right)^2 = 1$$

valgono a determinare la direzione dell'elemento dt e la grandezza della tensione T_s, una volta che sia assegnata la direzione dell'elemento ds, e si siano calcolate, dalle equazioni dell'equilibrio, le funzioni λ e μ.

Il modo reciproco di comportarsi degli elementi ds e dt, che risulta dalla (6), ci permette di dedurre immediatamente dalle (5)

le altre:

$$T_1 \frac{\partial u}{\partial s} = \lambda \frac{\partial v}{\partial t}, \qquad T_1 \frac{\partial v}{\partial s} = -\mu \frac{\partial u}{\partial t}.$$

Da queste poi e dalle (5) si ricava:

$$T_1 T_1 + \lambda\mu = 0, \tag{7}$$

della quale abbiamo già incontrato un caso particolare nella (4); ora però resta tolta l'ambiguità del segno. Mediante la (7), data la tensione dell'elemento ds col suo segno, risulta perfettamente determinata la tensione dell'elemento *coniugato* dt; e viceversa.

La (6) è l'equazione di un'involuzione quadratica in cui sono coniugate le direzioni degli elementi ds e dt. Gli elementi doppi, ossia gli elementi lineari uscenti da uno stesso punto della rete e soggetti a sola tensione tangenziale, si ottengono dall'equazione

$$\mu \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)^2 + \lambda \left(\frac{\partial v}{\partial s}\right)^2 = 0. \tag{6'}$$

Essi sono imaginari, reali distinti o coincidenti secondochè è

$$\lambda\mu > 0, \qquad < 0, \qquad = 0.$$

Nel primo caso adunque nel punto considerato non vi sono elementi lineari soggetti a sola tensione tangenziale; nel secondo caso ve n'ha due, e il valore della tensione che l'uno o l'altro sopporta è dato da

$$T_1^2 = -\lambda\mu, \tag{7'}$$

sicchè questi due elementi sono soggetti a tensioni eguali in grandezza. Essi poi non potranno mai essere i due fili della rete, poichè questi sono coniugati rispetto alle tensioni. Nell'ultimo caso vi ha un solo elemento soggetto a tensione tangenziale, e il valore di questa tensione è [illegible] l'involuzione (6) è allora parabolica, ed i vari elementi uscenti da [illegible] considerato sono soggetti a tensioni tutte dirette secondo [illegible] Essendo $\lambda\mu = 0$, sarà o

$\lambda = 0$ o $\mu = 0$, e questo significa [per le (4)] che uno almeno dei due fili è esente da tensione. D'altra parte, se ricerchiamo gli elementi esenti da tensione troviamo che affinchè nelle (5) sia $T_s = 0$, dev'essere $\lambda = 0$, $\mu = 0$, dal che segue che allora la (6') è identicamente soddisfatta qualunque sia la direzione dell'elemento $d\,s$, e quindi ogni elemento uscente dal punto in questione è esente da tensione; a meno che l'elemento $d\,s$ esente da tensione sia un filo della rete, ad es. una linea u, nel qual caso non è necessario per l'annullarsi di T_s che sia $\lambda = 0$, cioè vi ha allora un unico elemento esente da tensione, ed è uno dei due fili. In sostanza possiamo dire che se degli elementi lineari uscenti da un punto della rete ve n'ha uno che sia esente da tensione, o è unico, ed appartiene ad un filo della rete, ovvero, se è un elemento generico, ogni altro elemento è pure esente da tensione. Nel caso che l'elemento esente da tensione sia unico, poichè allora è l'elemento centrale dell'involuzione parabolica che si ha intorno al punto considerato, è soggetto ad una tensione che è diretta secondo esso stesso; ciò sembra in contraddizione col fatto che i fili della rete sono coniugati rispetto alle tensioni, ma la contraddizione è solo apparente, poichè essendo quella tensione nulla, le si può attribuire la direzione che si vuole.

Gli elementi *principali* dell'involuzione (6), cioè gli elementi passanti per un punto (u, v) della rete e soggetti a sola tensione normale sono quelli che verificano, oltre la (6), anche l'equazione:

$$E\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t} + F\left(\frac{\partial u}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial u}{\partial t}\right) + G\frac{\partial v}{\partial s}\frac{\partial v}{\partial t} = 0,$$

che è la condizione di ortogonalità degli elementi $d\,s$ e $d\,t$. Eliminando $\frac{\partial u}{\partial t}$ e $\frac{\partial v}{\partial t}$ fra questa e la (6), si trova:

$$\text{(8)} \qquad \begin{vmatrix} E\frac{\partial u}{\partial s} + F\frac{\partial v}{\partial s} & F\frac{\partial u}{\partial s} + G\frac{\partial v}{\partial s} \\ \mu\frac{\partial u}{\partial s} & \lambda\frac{\partial v}{\partial s} \end{vmatrix} = 0,$$

equazione di 2° grado nel rapporto $\frac{\partial u}{\partial s} : \frac{\partial v}{\partial s}$, ed a ciascuna radice corrisponde un elemento il cui coniugato gli è ortogonale. Si sa a priori che le due radici della (8) sono reali, e del resto ciò risulta anche dal fatto che il suo discriminante

$$(E\lambda - G\mu)^2 + 4F^2\lambda\mu = \frac{F^2(E\lambda + G\mu)^2 + H^2(E\lambda - G\mu)^2}{EG}$$

non è mai negativo.

Per avere le tensioni corrispondenti a quelle due direzioni prendiamo le formole

$$E\frac{\partial u}{\partial s} + F\frac{\partial v}{\partial s} = H\frac{\partial v}{\partial n}, \quad F\frac{\partial u}{\partial s} + G\frac{\partial v}{\partial s} = -H\frac{\partial u}{\partial n}, \text{ (*)}$$

e si sostituisca nelle (5) ove si prenda per elemento dt lo stesso dn; si avrà per la determinazione delle tensioni principali l'equazione:

$$T_s^2 + \frac{E\lambda + G\mu}{H}T_s + \lambda\mu = 0,$$

le cui radici sono reali, poichè il suo discriminante

$$\frac{(E\lambda - G\mu)^2 + 4F^2\lambda\mu}{H^2}$$

differisce solo per un fattore positivo dal discriminante della (8), che è positivo.

Le due tensioni relative agli elementi principali sono eguali quando si abbia:

$$E\lambda + G\mu = 0, \qquad E\lambda - G\mu = 0,$$

(*) Beltrami: *Delle variabili complesse su una superficie qualunque.*—Ann. di Matematica, serie II, tomo I.

oppure:

$$F = 0, \qquad E\lambda - G\mu = 0.$$

Nel primo caso si ha $\lambda = \mu = 0$, e quindi tutti gli elementi uscenti dal punto (u, v) sono esenti da tensione. Nel secondo caso i fili in quel punto sono ortogonali, ed inoltre è

$$\lambda : \mu = G : E$$

onde la (8) diventa un'identità, ed ogni elemento uscente da quel punto è soggetto a sola tensione normale, la quale poi, come si verifica facilmente, è la stessa per ciascun elemento. In conclusione si può dire che se in un pnnto della rete le due tensioni principali sono eguali, la tensione è quella stessa per ogni altro elemento, ed è diversa da zero nel caso soltanto che i fili siano in quel punto ortogonali.

IV.

Dal confronto fra le superficie flessibili ed inestendibili e le reti nasce naturalmente la seguente questione: data una superficie inestendibile in equilibrio sotto l'azione di un certo sistema di forze, si supponga che essa perda l'inestendibilità salvo lungo due famiglie di linee; si vuol sapere se sia possibile scegliere queste in modo che la rete da esse individuata continui a mantenersi in equilibrio sotto l'azione di quelle medesime forze. La questione si risolve molto facilmente; basta difatti osservare che, ad es., le equazioni (1) e (1_1) da noi ottenute per l'equilibrio di una rete si possono ricavare dalle analoghe date dal Beltrami per una superficie inestendibile ponendo in queste $\mu = 0$ e leggendo μ in luogo di ν.

Ora l'essere $\mu = 0$ per una superficie inestendibile significa (vedi Beltrami, § 7) che le linee coordinate sono coniugate rispetto alle tensioni; si ha quindi il teorema:

« Un sistema di forze, che tenga in equilibrio una superficie flessibile ed inestendibile, tiene pure in equilibrio una rete i cui fili

siano costituiti da due sistemi di linee di quella superficie coniugate rispetto alle tensioni ».

Si può dunque in infiniti modi scegliere su una superficie inestendibile due sistemi di linee tali che, conservandosi queste inestendibili, la superficie rimanga in equilibrio perdendo l'inestendibilità per tutte le altre linee; e precisamente, scelta sulla superficie una famiglia di linee, si può ad essa associarne un'altra, in modo che il sistema totale soddisfi alle condizioni volute. L'unico caso di eccezione si presenta quando la famiglia che si sceglie è formata tutta di linee autoconiugate rispetto alle tensioni.

Una semplice applicazione del teorema dimostrato si ottiene considerando i due casi particolari di equilibrio per una superficie inestendibile studiati dal Beltrami ai §§ 8 e 9 della sua Memoria.

Nel primo di quei casi se vi poniamo $\mu = 0$ si ottiene $F = 0$, onde la proposizione:

« Un pezzo qualunque di rete a fili ortogonali è mantenuto in equilibrio da una forza normale alla rete e proporzionale alla curvatura media locale, e da una tensione costante e normale all'elemento lineare su cui agisce ».

Nel secondo caso, dall'essere $\mu = 0$ segue $D' = 0$, e quindi il teorema:

« Un pezzo qualunque di rete sulla quale i fili siano linee coniugate (nel senso geometrico) è mantenuto in equilibrio da una forza normale alla rete e proporzionale alla curvatura totale locale, e da una tensione lungo il contorno diretta secondo la tangente ad esso coniugata ed avente la componente normale proporzionale alla curvatura normale del contorno ».

L'indicatrice delle tensioni coincide con quella di Dupin, poichè si ha

$$\lambda = \frac{\rho}{2} \frac{D''}{H}, \qquad \nu = \frac{\rho}{2} \frac{D}{H},$$

essendo ρ una costante, e la (6) si riduce all'equazione

$$D \frac{\partial u}{\partial s} \frac{\partial u}{\partial t} + D'' \frac{\partial v}{\partial s} \frac{\partial v}{\partial t} = 0.$$

Siccome poi è

$$\lambda \mu = \frac{\rho^2}{4} \frac{D D''}{H^2} = \frac{\rho^2}{4} k,$$

indicando k la curvatura totale della rete in equilibrio, dalla (7') segue che il quadrato della tensione, che sopporta l'una o l'altra assintotica uscente da un punto qualunque della rete, è proporzionale alla curvatura totale in quel punto. Indicando inoltre con $\frac{1}{T}$ il comune valore assoluto della torsione delle due assintotiche, si ha in ogni punto, come è noto:

$$\frac{1}{T^2} = -k,$$

cioè possiamo dire che, nel caso di equilibrio da noi esaminato, nei punti iperbolici della rete le linee assintotiche sopportano una tensione proporzionale alla torsione delle linee stesse e nella loro direzione medesima; in particolare le linee assintotiche piane sono esenti da tensione. Queste proprietà poi valgono anche, come è naturale, per le superficie inestendibili.

Le equazioni (1), se io pongo

$$H X' = \frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda \frac{\partial x}{\partial u}\right), \quad H Y' = \frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda \frac{\partial y}{\partial u}\right), \quad H Z' = \frac{\partial}{\partial u}\left(\lambda \frac{\partial z}{\partial u}\right),$$

$$H X'' = \frac{\partial}{\partial v}\left(\mu \frac{\partial x}{\partial v}\right), \quad H Y'' = \frac{\partial}{\partial v}\left(\mu \frac{\partial y}{\partial v}\right), \quad H Z'' = \frac{\partial}{\partial v}\left(\mu \frac{\partial z}{\partial v}\right),$$

si scrivono:

$$X = X' + X'', \qquad Y = Y' + Y'', \qquad Z = Z' + Z''.$$

Ora (*) le equazioni della prima terna sono quelle dell'equi-

(*) Cfr. Morera: *Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili.*— Transunti dell'Accademia dei Lincei, adunanza 3 giugno 1883.

librio della porzione infinitesima della rete compresa fra le linee $u = \text{cost.}$ e $u + du = \text{cost.}$; l'analogo si dica per le equazioni della seconda terna. Allora la terza terna conduce al seguente teorema:

« Se una rete è in equilibrio sotto l'azione di certe forze, e la dividiamo in striscie infinitesime mediante l'uno o l'altro sistema dei suoi fili, anche le forze applicate si possono decomporre in due sistemi, corrispondenti ciascuno ad una divisione della rete in striscie, in modo che uno qualunque di essi tenga in equilibrio la rete come costituita dalle sue striscie mantenentisi in equilibrio come altrettante curve funicolari ».

Questo non è altro che l'estensione alle reti di un teorema dimostrato dal prof. Morera per le superficie inestendibili nella Nota ora citata, e si poteva evidentemente dedurre senz'altro dal teorema di Morera applicando la proposizione dimostrata sul principio di questo numero; come pure si potrebbe, inversamente, valersi del teorema enunciato da ultimo per dimostrare quella proposizione generale.

L'importanza di questa proposizione sta in ciò, che mediante essa si possono trasportare alle reti tutti i teoremi relativi all'equilibrio di una superficie inestendibile, e questo si fa col sostituire in ogni caso alla superficie inestendibile una rete coi fili formati da linee convenienti. Alcune volte i fili della rete hanno un'importanza geometrica particolare, come si vede nei seguenti due casi, che furono esaminati per le superficie inestendibili dal sig. Lecornu nella sua Memoria: *Sur l'équilibre des surfaces flexibles et inextensibles* (Journal de l'École polytechnique, 48e cahier).

1° Al capitolo III il Lecornu dimostra che « in una superficie flessibile ed inestendibile, in equilibrio sotto l'azione di forze tangenti ad essa, le direzioni assintotiche sono coniugate rispetto alle tensioni » (*). Allora noi possiamo aggiungere che una tale super-

(*) Si può osservare che questa proprietà vale anche se la superficie non è inestendibile. Ad es. per le reti si può dimostrare direttamente nel seguente modo. La terza delle (2), nell'ipotesi che sia $W = 0$, dà:

$$\lambda : \mu = - D'' : D,$$

ficie continuerà a rimanere in equilibrio sotto l'azione delle stesse forze anche quando cessi di essere inestendibile, conservando solo più l'inestendibilità per le linee assintotiche. Sotto un'altra forma il teorema si enuncia così: « Se una rete, in equilibrio sotto l'azione di forze tangenti ad essa, ha un sistema di fili formato dalle linee assintotiche dell'un sistema, avrà l'altro sistema di fili formato dalle linee assintotiche del secondo sistema » (*). In particolare se la rete ha la forma di una superficie rigata e un sistema di fili si dispone secondo le generatrici rettilinee, l'altro sistema di fili si dispone secondo le assintotiche dell'altro sistema; e viceversa. È naturale che vanno escluse le sviluppabili, per l'ipotesi che i due sistemi di fili siano sempre distinti: a meno che la sviluppabile non sia addirittura piana.

---

e la (6), moltiplicata per $ds\,dt$, diventa:

$$D\,du\,\delta u - D''\,dv\,\delta v = 0, \tag{α}$$

indicando con δu, δv gli accrescimenti di u e v nella direzione dell'elemento dt. D'altra parte l'equazione differenziale delle linee assintotiche è

$$D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2 = 0, \tag{β}$$

ed è facile vedere che le due direzioni determinate in un punto qualunque da quest'ultima equazione verificano pure la (α). Difatti dividendo nella (α) per $dv\,\delta v$, e nella (β) per dv^2, esse diventano rispettivamente:

$$D\frac{du}{dv}\frac{\delta u}{\delta v} - D'' = 0 \tag{α'}$$

$$D\left(\frac{du}{dv}\right)^2 + 2D'\frac{du}{dv} + D'' = 0; \tag{β'}$$

chiamando $\left(\frac{du}{dv}\right)_1$ e $\left(\frac{du}{dv}\right)_2$ le radici della (β'), si ha: $\left(\frac{du}{dv}\right)_1\left(\frac{du}{dv}\right)_2 = \frac{D''}{D}$, ma allora è evidente che la (α') rimane soddisfatta ponendovi $\frac{du}{dv} = \left(\frac{du}{dv}\right)_1$, $\frac{\delta u}{\delta v} = \left(\frac{du}{dv}\right)_2$.

(*) Salvo il caso che sia nulla la tensione sul primo sistema di fili; allora si comprende come possano anche i fili del secondo sistema non essere assintotiche. Questo teorema, del resto, col relativo caso d'esclusione, risulta pure immediatamente dall'esame delle equazioni (2).

2° Al cap. IV (pag. 87) il Lecornu determina le condizioni di equilibrio di un ellissoide di rivoluzione contenente un fluido che eserciti una pressione normale costante, e trova che i meridiani ed i paralleli sono le linee di tensione normale. Da ciò noi deduciamo subito il teorema: « Una rete avente la forma di un ellissoide di rotazione, sul quale i meridiani ed i paralleli siano costituiti dai fili, sta in equilibrio sotto l'azione di una pressione normale costante esercitata sulla sua superficie da un fluido racchiuso nel suo interno ».

Lo stesso teorema con cui comincia questo numero ci permette ancora di fare questa osservazione: se un sistema di forze mantiene in equilibrio una certa rete, manterrà pure in equilibrio qualunque altra rete avente la stessa forma della prima, ed i cui fili siano formati, invece che dai primitivi, da due altri qualunque sistemi di linee coniugate rispetto alle tensioni; sulle due reti la distribuzione delle tensioni sarà evidentemente la stessa. In particolare ad una rete si potrà sempre sostituire, per ciò che riguarda l'equilibrio, un'altra rete coi fili ortogonali.

V.

Vediamo ora come si particolarizzano le equazioni dell'equilibrio per alcuni tipi speciali di superficie, quali le superficie di rotazione, le rigate sghembe e sviluppabili, ecc. Partirò dalle equazioni (2), come quelle che dànno le componenti delle forze rispetto a tre direzioni intimamente collegate colla superficie. Le reti che noi considereremo saranno poi formate in modo che le linee coordinate assunte su di esse coincidano coi loro fili.

Superficie di rotazione.

Preso come asse z l'asse di rotazione, detto r il raggio del parallelo e φ la longitudine rispetto al piano xz, le coordinate di un punto generico della superficie vengono così espresse:

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\,\mathrm{sen}\,\varphi, \qquad z = z(r),$$

essendo $z = z(r)$ l'equazione della curva meridiana. Formando le

derivate di x, y, z che ci occorrono, veniamo a trovare, se poniamo $u = r$, $v = \varphi$:

$$E = 1 + z'^2(r), \quad F = 0, \quad G = r^2, \quad H = r\sqrt{1 + z'^2};$$

$$E_1 = \frac{z' z''}{1 + z'^2}, \quad G_1 = -\frac{r}{1 + z'^2}, \quad E_2 = 0, \quad G_2 = 0;$$

$$D = \frac{z''}{\sqrt{1 + z'^2}}, \qquad D'' = \frac{r z'}{\sqrt{1 + z'^2}}.$$

Allora le equazioni dell'equilibrio si scrivono:

$$U = \frac{1}{r}\left(\frac{\partial \lambda}{\partial r} + \frac{z' z''}{1 + z'^2}\lambda - \frac{r}{1 + z'^2}\mu\right)$$

$$V = \frac{1}{\sqrt{1 + z'^2}}\frac{\partial \mu}{\partial \varphi}$$

$$W = \frac{1}{r(1 + z'^2)}(z''\lambda + r z'\mu).$$

Invece di assumere come parametro u il raggio r del parallelo, si potrebbe assumere l'arco u di meridiano; in tal caso il quadrato dell'elemento lineare può assumere la forma isoterma, e le equazioni che si ottengono valgono poi anche pel cilindro. Si avrebbe allora:

$$u = \int \sqrt{1 + z'^2(r)}\, d r,$$

donde si trae

$$r = \psi(u),$$

e la funzione $\psi(u)$ definisce la curva meridiana.

Le equazioni della superficie divengono:

$$x = \psi(u)\cos\varphi, \quad y = \psi(u)\operatorname{sen}\varphi, \quad z = z(u),$$

e quindi si ha

$$E = 1, \qquad G = \psi^2(u), \qquad H = \psi(u);$$

$$E_1 = 0, \qquad G_1 = -\psi\psi', \qquad E_2 = 0, \qquad G_2 = 0;$$

$$D = \psi'\zeta'' - \psi''\zeta', \qquad D'' = \psi\zeta';$$

le equazioni dell'equilibrio assumono quindi la forma:

$$(9) \qquad \begin{cases} U = \dfrac{1}{\psi}\dfrac{\partial \lambda}{\partial u} - \psi'\mu \\[2ex] V = \dfrac{\partial \mu}{\partial \varphi} \\[2ex] W = \dfrac{\psi'\zeta'' - \psi''\zeta'}{\psi}\lambda + \zeta'\mu. \end{cases}$$

Se la superficie è cilindrica, non c'è che da supporre, in queste ultime, ψ costante e $\zeta = u$, e le equazioni diventano, se si legge r in luogo di ψ:

$$(9') \qquad U = \frac{1}{r}\frac{\partial \lambda}{\partial u}, \qquad V = \frac{\partial \mu}{\partial \varphi}, \qquad W = \mu.$$

Superficie rigate.

Consideriamo una rete in equilibrio avente un sistema di fili rettilinei, mentre i fili del secondo sistema siano tali che le porzioni di generatrici rettilinee comprese fra due qualunque di essi siano tutte eguali fra di loro. Assumiamo un filo del secondo sistema come direttrice della rigata, e indichiamolo con C, e diciamo v il suo arco a partire da un punto fisso; siano poi p, q, r le coordinate cartesiane di un punto di C espresse in funzione di v, e l, m, n i coseni direttori della generatrice passante per il punto (p, q, r) di C, espressi pure in funzione di v. Se allora chiamo u l'ascissa di un punto della rete, contata sulla generatrice passante per esso a partire dalla curva C, le coordinate x, y, z di quel punto vengono

così espresse:

$$x = p + l\,u, \qquad y = q + m\,u, \qquad z = r + n\,u.$$

Se si pone

$$l'^2 + m'^2 + n'^2 = M^2, \qquad l'p' + m'q' + n'r' = N,$$
$$l\,p' + m\,q' + n\,r' = \cos\theta,$$

e si tien conto delle

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \qquad p'^2 + q'^2 + r'^2 = 1,$$

si ottiene

$$E = 1, \qquad F = \cos\theta, \qquad G = M^2u^2 + 2\,N u + 1,$$
$$H = \sqrt{M^2u^2 + 2\,N u + \mathrm{sen}^2\,\theta},$$

dove θ indica evidentemente l'angolo d'inclinazione delle generatrici sulla direttrice; si ha inoltre

$$D = 0, \qquad D'' = \frac{\Delta}{H},$$

essendosi posto per brevità

$$\Delta = \begin{vmatrix} l & m & n \\ p' + l'u & q' + m'u & r' + n'u \\ p'' + l''u & q'' + m''u & r'' + n''u \end{vmatrix}.$$

Calcolando poi i simboli di Christoffel, si ha per le equazioni dell'equilibrio:

$$\text{o)}\quad \begin{cases} U = \dfrac{1}{H}\dfrac{\partial\lambda}{\partial u} - \dfrac{\cos\theta(MM'u+N')u + (M^2u^2+2Nu+1)(M^2u+N+\theta'\mathrm{sen}\theta)}{H^3}\mu \\[2ex] V = \dfrac{\sqrt{M^2u^2+2Nu+1}}{H}\left[\dfrac{\partial\mu}{\partial v} + \dfrac{(MM'u+N')u+\cos\theta(M^2u+N+\theta'\mathrm{sen}\theta)}{H^3}\mu\right] \\[2ex] W = \dfrac{\Delta}{H^2}\mu. \end{cases}$$

e quindi si ha

$$E = 1, \qquad G = \psi^2(u), \qquad H = \psi(u);$$

$$E_1 = 0, \qquad G_1 = -\psi\psi', \qquad E_2 = 0, \qquad G_2 = 0;$$

$$D = \psi'\zeta'' - \psi''\zeta', \qquad D'' = \psi\zeta';$$

le equazioni dell'equilibrio assumono quindi la forma:

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} U &= \frac{1}{\psi}\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \psi'\mu \\ V &= \frac{\partial\mu}{\partial\varphi} \\ W &= \frac{\psi'\zeta'' - \psi''\zeta'}{\psi}\lambda + \zeta'\mu. \end{aligned} \right.$$

Se la superficie è cilindrica, non c'è che da supporre, in queste ultime, ψ costante e $\zeta = u$, e le equazioni diventano, se si legge in luogo di ψ:

$$(9') \qquad U = \frac{1}{r}\frac{\partial\lambda}{\partial u}, \qquad V = \frac{\partial\mu}{\partial\varphi}, \qquad W = \mu.$$

Superficie rigate.

Consideriamo una rete in equilibrio avente un sistema di fili rettilinei, mentre i fili del secondo sistema siano tali che le porzioni di generatrici rettilinee comprese fra due qualunque di essi siano tutte eguali fra di loro. Assumiamo un filo del secondo sistema come direttrice della rigata, e indichiamolo con C, e diciamo v il suo arco a partire da un punto fisso; siano poi p, q, r le coordinate cartesiane di un punto di C espresse in funzione di v, e l, m, n i coseni direttori della generatrice passante per il punto (p, q, r) di C, espressi pure in funzione di v. Se allora chiamo u l'ascissa di un punto della rete, contata sulla generatrice passante per esso a partire dalla curva C, le coordinate x, y, z di quel punto vengono

così espresse:

$$x = p + l u, \qquad y = q + m u, \qquad z = r + n u.$$

Se si pone

$$l'^2 + m'^2 + n'^2 = M^2, \qquad l'p' + m'q' + n'r' = N,$$
$$l p' + m q' + n r' = \cos\theta,$$

e si tien conto delle

$$l^2 + m^2 + n^2 = 1, \qquad p'^2 + q'^2 + r'^2 = 1,$$

si ottiene

$$E = 1, \qquad F = \cos\theta, \qquad G = M^2 u^2 + 2 N u + 1,$$
$$H = \sqrt{M^2 u^2 + 2 N u + \mathrm{sen}^2\theta},$$

dove θ indica evidentemente l'angolo d'inclinazione delle generatrici sulla direttrice; si ha inoltre

$$D = 0, \qquad D'' = \frac{\Delta}{H},$$

essendosi posto per brevità

$$\Delta = \begin{vmatrix} l & m & n \\ p' + l'u & q' + m'u & r' + n'u \\ p'' + l''u & q'' + m''u & r'' + n''u \end{vmatrix}.$$

Calcolando poi i simboli di Christoffel, si ha per le equazioni dell'equilibrio:

$$\begin{cases} U = \dfrac{1}{H}\dfrac{\partial\lambda}{\partial u} - \dfrac{\cos\theta(MM'u+N')u + (M^2u^2+2Nu+1)(M^2u+N+\theta'\mathrm{sen}\theta)}{H^3}\mu \\[2ex] V = \dfrac{\sqrt{M^2u^2+2Nu+1}}{H}\left[\dfrac{\partial\mu}{\partial v} + \dfrac{(MM'u+N')u + \cos\theta(M^2u+N+\theta'\mathrm{sen}\theta)}{H^2}\mu\right] \\[2ex] W = \dfrac{\Delta}{H^2}\mu. \end{cases}$$

In particolare supponiamo che la curva C sia traiettoria ortogonale delle generatrici, nel qual caso tutti gli altri fili dello stesso sistema di C sono ortogonali alle generatrici perchè geodeticamente paralleli a C; dobbiamo nelle equazioni precedenti porre $\theta = \frac{\pi}{2}$; con questo esse diventano:

$$
(10') \quad \left\{
\begin{aligned}
U &= \frac{1}{\sqrt{M^2u^2 + 2Nu + 1}} \left[\frac{\partial \lambda}{\partial u} - (M^2u + N)\mu\right] \\
V &= \frac{\partial \mu}{\partial v} + \frac{(MM'u + N')u}{M^2u^2 + 2Nu + 1}\mu \\
W &= \frac{\Delta}{M^2u^2 + 2Nu + 1}\mu .
\end{aligned}
\right.
$$

Le (10) si semplificano se tra i fili della rete vi è la *linea di stringimento* della superficie; essa è caratterizzata dall'essere verificata in ogni suo punto la condizione

$$M^2u + N = 0, \text{ (*)}$$

e se noi vogliamo assumerla per direttrice, cioè per linea $u = 0$, dobbiamo porre nelle (10) $N = 0$; con ciò le (10) diventano:

$$U = \frac{1}{\sqrt{M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta}}\frac{\partial \lambda}{\partial u} - \frac{MM'u^2\cos\theta + (M^2u^2 + 1)(M^2u + \theta'\operatorname{sen}\theta)}{(M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta)^{3/2}}\mu$$

$$V = \frac{\sqrt{M^2u^2 + 1}}{\sqrt{M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta}}\left[\frac{\partial \mu}{\partial v} + \frac{MM'u^2 + (M^2u + \theta'\operatorname{sen}\theta)\cos\theta}{M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta}\mu\right]$$

$$W = \frac{\Delta}{M^2u^2 + \operatorname{sen}^2\theta}\mu .$$

(*) Vedi Bianchi: Lezioni di Geometria differenziale, cap. VIII.

Se noi esaminiamo le equazioni dell'equilibrio di una superficie rigata, ad es. le (10) che sono le più generali, si vede che quando manca la componente normale delle forze applicate, deve annullarsi il prodotto $\Delta\,\mu$. Supposto che la tensione superficiale, che si esercita sui fili rettilinei, non sia nulla, cioè supposto $\mu \neq 0$, dovrà essere necessariamente $\Delta = 0$, cioè i fili del secondo sistema dovranno disporsi secondo l'altro sistema di assintotiche. Se invece fosse $\mu = 0$, allora non si richiede più per l'equilibrio che sia $\Delta = 0$; invece dalla seconda delle (10) risulta $V = 0$, ossia le forze applicate debbono necessariamente essere dirette secondo i fili rettilinei.

Queste osservazioni si collegano con ciò che fu detto al n° 4 come conseguenza di un teorema del sig. Lecornu.

È notevole il caso in cui, essendo la linea C traiettoria ortogonale delle generatrici, le forze sono tangenziali, e la tensione sulle generatrici non è nulla. Allora essendo le forze tangenziali, ed i fili rettilinei formando uno dei due sistemi di assintotiche, l'altro sistema di fili si disporrà a sua volta secondo le assintotiche del secondo sistema, come s'è visto ora; la superficie che si considera, essendo allora a linee assintotiche ortogonali, è ad area minima, ed essendo rigata non può essere che l'elicoide rigata ad area minima. Su di essa le generatrici sono formate dall'un sistema di fili, mentre dei fili dell'altro sistema uno si dispone secondo l'asse dell'elicoide, ed i rimanenti si dispongono secondo tante eliche circolari cilindriche dello stesso passo, ortogonali alle generatrici ed aventi tutte lo stesso asse, che è l'asse dell'elicoide. Si può vedere più particolarmente come diventano le equazioni dell'equilibrio per questa rete speciale quando si assuma come direttrice C il suo asse. Se questa retta la si prende come asse z, la sua equazione è $z = v$, e le funzioni state indicate con p, q, r si riducono a

$$p = 0, \qquad q = 0, \qquad r = v,$$

onde:

$$p' = 0, \qquad q' = 0, \qquad r' = 1.$$

Se poi si imagina l'elicoide generata da una retta che si appoggi

all'asse C e si muova di moto rotatorio intorno all'asse e nello stesso tempo di moto traslatorio parallelamente ad esso in modo che le velocità dei due movimenti abbianó un rapporto costante, detto φ l'angolo di cui ha rotato la generatrice dopo un tempo qualunque, e k il rapporto costante fra la velocità di traslazione e quella di rotazione, abbiamo:

$$z = k\varphi,$$

supponendo che si sia presa l'origine nel punto dell'asse dal quale si ammette che cominci il moto della retta generatrice.

Sarà quindi anche $v = k\varphi$, donde

$$\varphi = \frac{v}{k}.$$

Se poi gli angoli φ li contiamo dal piano xz, si ha:

$$l = \cos\frac{v}{k}, \qquad m = \operatorname{sen}\frac{v}{k}, \qquad n = 0,$$

e quindi

$$M^2 = \frac{1}{k^2}, \qquad N = 0.$$

Introducendo questi valori nelle (10'), si ha per l'equilibrio dell'elicoide rigata ad area minima di parametro elicoidale k e soggetta a forze tangenziali, le equazioni:

$$U = \frac{1}{\sqrt{u^2 + k^2}}\left(k\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \frac{u}{k}\mu\right), \qquad V = \frac{\partial\mu}{\partial v}.$$

Superficie sviluppabili.

Se indichiamo con $d\sigma$ la minima distanza di due generatrici di una superficie rigata, abbiamo (vedi ad es. Bianchi: Lezioni di

Geometria differenziale, cap. VIII):

$$d\sigma = \frac{\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}}{M} dv,$$

ossia, poichè è

$$\begin{vmatrix} l & m & n \\ l' & m' & n' \\ p' & q' & r' \end{vmatrix}^2 = M^2 \operatorname{sen}^2 \theta - N^2,$$

$$d\sigma = \frac{\sqrt{M^2 \operatorname{sen}^2 \theta - N^2}}{M} dv.$$

Per le superficie sviluppabili c'è da porre $d\sigma = 0$, cioè:

$$M^2 \operatorname{sen}^2 \theta - N^2 = 0,$$

donde:

$$N = \pm M \operatorname{sen} \theta.$$

La scelta fra i due segni dipende dalla scelta che si è fatta del senso positivo sulle generatrici. Prendiamo difatti l'equazione dello spigolo di regresso (che non è altro se non la linea di stringimento della superficie):

$$M^2 u + N = 0;$$

essa dice che il segmento di generatrice intercetto fra la direttrice e lo spigolo di regresso è dato da $-\frac{N}{M^2}$. Se come senso positivo sulle generatrici si prende quello che va dallo spigolo di regresso alla direttrice, si ha $-\frac{N}{M^2} < 0$, e quindi $N > 0$; e sarà invece

$N < 0$ se si fa la convenzione opposta. Essendo arbitrario il senso positivo da assumersi sulle generatrici, ne viene che anche il segno di N è, in sostanza, arbitrario, ma o sempre positivo o sempre negativo, nell'ipotesi che il senso positivo sulle generatrici si scelga colla legge che si è detto. Noi converremo di prendere N positivo. Si osservi poi che se si indica con M il valore assoluto di $\sqrt{M^2}$, la quantità $M \operatorname{sen} \theta$ è positiva, convenendosi di scegliere per angolo di due linee coordinate u e v sempre quello che è minore di due retti. Ne viene che noi dobbiamo porre

$$N = M \operatorname{sen} \theta.$$

Le equazioni dell'equilibrio di una rete avente la forma di una superficie sviluppabile, con un sistema di fili rettilinei e a direttrice qualunque, si possono allora dedurre dalle (10) ponendovi $N = M \operatorname{sen} \theta$. Con ciò le (10) diventano:

$$U = \frac{1}{Mu + \operatorname{sen}\theta} \times$$

$$\frac{\lambda}{u} - \frac{\cos\theta(MM'u + M'\operatorname{sen}\theta + \theta' M\cos\theta)u + (M^2u^2 + 2Mu\operatorname{sen}\theta + 1)(M^2u + M\operatorname{sen}\theta + \theta}{(Mu + \operatorname{sen}\theta)^2}$$

$$V = \frac{\sqrt{M^2u^2 + 2Mu\operatorname{sen}\theta + 1}}{Mu + \operatorname{sen}\theta} \times$$

$$\left[\frac{\partial\mu}{\partial v} + \frac{(MM'u + M'\operatorname{sen}\theta + \theta' M\cos\theta)u + \cos\theta(M^2u + M\operatorname{sen}\theta + \theta'\operatorname{sen}}{(Mu + \operatorname{sen}\theta)^2}\right.$$

$$W = \frac{\Delta}{(Mu + \operatorname{sen}\theta)^2}\mu.$$

Quando la direttrice è una traiettoria ortogonale delle generatrici, cioè quando è $\theta = \frac{\pi}{2}$, le equazioni scritte si semplificano nelle seguenti:

$$(11')\quad \left\{\begin{aligned} U &= \frac{1}{Mu+1}\frac{\partial\lambda}{\partial u} - M\mu \\ V &= \frac{\partial\mu}{\partial v} + \frac{M'u}{Mu+1}\mu \\ W &= \frac{\Delta}{(Mu+1)^2}\mu. \end{aligned}\right.$$

Assumendo come direttrice lo spigolo di regresso, nelle (11) si ha da porre $\theta = 0$, ed inoltre $l = p'$, $m = q'$, $n = r'$; facendo queste sostituzioni le (11) prendono la forma:

$$U = \frac{1}{Mu}\left[\frac{\partial\lambda}{\partial u} - \left(\frac{M'}{M} + \frac{M^2u^2+1}{u}\right)\mu\right]$$

$$V = \frac{\sqrt{M^2u^2+1}}{M}\left(\frac{\partial\mu}{\partial v} + \frac{M'u+M}{Mu}\mu\right)$$

$$W = \frac{1}{M^2}\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \\ p''' & q''' & r''' \end{vmatrix}\mu.$$

Se poi si chiama $\frac{1}{\rho}$ e $\frac{1}{T}$ la flessione e la torsione dello spigolo di regresso, si può osservare che si ha:

$$M^2 = p''^2 + q''^2 + r''^2 = \frac{1}{\rho^2}, \qquad M' = -\frac{\rho'}{\rho^2},$$

ed inoltre facendo uso delle formole di Frenet, abbiamo:

$$\begin{vmatrix} p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \\ p''' & q''' & r''' \end{vmatrix} = -\frac{1}{\rho^2 T};$$

onde le precedenti equazioni dell'equilibrio si possono anche scrivere:

$$(11'')\quad \begin{cases} U = \frac{\rho}{u}\frac{\partial \lambda}{\partial u} + \frac{1}{u}\left(\rho' - \frac{u^2+\rho^2}{u\rho}\right)\mu \\ V = \frac{\sqrt{u^2+\rho^2}}{u}\left(\frac{\partial \mu}{\partial v} + \frac{\rho - \rho' u}{\rho u}\mu\right) \\ W = -\frac{1}{T}\mu; \end{cases}$$

in queste gli elementi geometrici che vi compaiono si riferiscono esclusivamente allo spigolo di regresso. Se nell'ultima delle (11″) si pone $\frac{1}{T} = 0$, si ha $W = 0$; ciò che si può esprimere dicendo che affinchè una rete piana stia in equilibrio si richiede che le forze applicate siano tutte contenute nel suo piano (*). Questo teorema risulta anche dalle (11), poichè dall'essere la rete piana segue $\Delta = 0$, e quindi anche $W = 0$.

Per passare alle *superficie cilindriche*, nell'ipotesi che i fili costituiscano le generatrici e le loro traiettorie ortogonali, cioè le sezioni rette, non c'è che da supporre nelle (11′) l, m, n costanti; con questo si ha:

$$M = 0, \quad \Delta = \begin{vmatrix} l & m & n \\ p' & q' & r' \\ p'' & q'' & r'' \end{vmatrix},$$

ovvero, indicando con $\frac{1}{\rho}$ la curvatura di una sezione retta, e con ξ, η, ζ i coseni direttori della sua normale (che ora coincide colla normale alla superficie):

$$\Delta = \begin{vmatrix} l & m & n \\ p' & q' & r' \\ \frac{\xi}{\rho} & \frac{\eta}{\rho} & \frac{\zeta}{\rho} \end{vmatrix} = \frac{1}{\rho}.$$

(*) Lo stesso teorema è dimostrato in altro modo dal Lecornu per le superficie inestendibili a pag. 46 della sua Memoria.

Allora le equazioni dell'equilibrio per una superficie cilindrica si possono scrivere:

$$(11''') \qquad U = \frac{\partial \lambda}{\partial u}, \qquad V = \frac{\partial \mu}{\partial v}, \qquad W = \frac{1}{\rho} \mu.$$

Un caso particolare di queste equazioni l'abbiamo nelle (9'), che si riferiscono ad una superficie cilindrica di rotazione; le (11''') con ρ costante coincidono difatti colle (9') quando si osservi che è $v = \rho\varphi$, e avendo avvertenza di porre nelle (9') $E = G$ onde avere l'elemento lineare ridotto a forma isoterma, come è appunto nelle (11''').

Le equazioni da noi date per le superficie sviluppabili cessano di valere per i punti infinitamente vicini allo spigolo di regresso, giacchè basta ricordare l'equazione di questa linea per vedere che nei punti della superficie prossimi ad essa le forze divengono infinite. Questo succede perchè noi abbiamo assunto le superficie sviluppabili definite come quelle rigate per cui è nulla la minima distanza fra due generatrici consecutive; ora propriamente non è vero che quella minima distanza sia nulla, ma soltanto è infinitesima di ordine superiore rispetto alla distanza stessa nelle rigate sghembe. Pertanto se quella distanza si può trascurare quando si tratti di punti della superficie che hanno dallo spigolo di regresso una distanza finita, lo stesso non si potrà più fare pei punti ad esso infinitamente vicini; in altre parole si può dire che in prossimità dello spigolo di regresso la superficie cessa di essere sviluppabile, e quindi ad essa non si possono più applicare le equazioni dell'equilibrio che valgono in generale per le superficie sviluppabili. D'altronde lo stesso sistema di linee coordinate non verifica, nei punti dello spigolo di regresso, la condizione che sia $H \neq 0$; difatti nei punti di quella curva le linee coordinate comprendono un angolo nullo.

VI.

Le equazioni dell'equilibrio di una superficie flessibile ed inestendibile contengono, oltre agli elementi relativi alla superficie ed

alle componenti delle forze, ancora tre funzioni indeterminate λ, μ, ν, le quali, introdotte come moltiplicatori secondo il principio di Lagrange, si vede poi che valgono a determinare le tensioni interne. Assegnata una configurazione d'equilibrio e fissate in modo arbitrario le forze applicate, la condizione affinchè quelle forze tengano in equilibrio la superficie è che si possano determinare tre funzioni λ, μ, ν soddisfacenti alle equazioni dell'equilibrio. L'essere tre le equazioni che legano le tre funzioni λ, μ, ν non significa ancora che quella determinazione sia in ogni caso possibile; però tale possibilità esiste in casi speciali che dipendono unicamente dalla natura della superficie. Così è noto come questo abbia luogo ogniqualvolta la superficie è a curvatura positiva: una superficie siffatta sta in equilibrio sotto l'azione di forze qualunque applicate nei punti interni, purchè si applichino al contorno delle forze convenienti (*). Un fatto simile non ha più luogo per le reti; le equazioni dell'equilibrio di una rete contengono solo più due funzioni indeterminate, λ e μ, ed è allora prevedibile come, per la coesistenza delle tre equazioni in queste due funzioni considerate come incognite, non si possa assumere arbitrariamente le forze applicate, ma invece le loro componenti debbano dipendere in qualche modo dagli elementi relativi alla superficie. Che le forze applicate non abbiano da essere del tutto arbitrarie si giunge a comprenderlo anche osservando che su una rete in equilibrio i fili sono linee di tensioni coniugate; per conseguenza quando si assegna di una rete una certa configurazione di equilibrio, si vengono implicitamente ad assegnare due sistemi di linee coniugati rispetto alle tensioni; e le forze applicate dovranno essere tali da conservare la relazione che deve passare fra quelle due famiglie di linee. Per le superficie inestendibili invece una tale limitazione per le forze non esiste, almeno in generale.

Per dimostrare che le componenti delle forze applicate ad una rete in equilibrio sono legate da una relazione, e per trovar questa nel medesimo tempo, partirò dalle equazioni (2), le quali presentano questo vantaggio, che la terza contiene λ e μ sotto forma finita e

(*) Vedi Volterra: « *Sull'equilibrio delle superficie flessibili ed inestendibili* ».—Transunti dell'Acc. dei Lincei, serie 3ª, vol. VIII.

linearmente. Comincerò coll'escludere che i coefficienti D e D'' siano eguali a zero, cioè che i fili siano formati da assintotiche. Allora dalle (2) si può senz'altro eliminare μ ricavandolo dalla terza, e sostituendolo nelle due prime, le quali in tal modo diventano:

$$U = \frac{\sqrt{E}}{HD''}\left[D''\frac{\partial \lambda}{\partial u} + (E_1 D'' - G_1 D)\lambda + G_1 H W\right]$$

$$V = \frac{\sqrt{G}}{HD''}\times$$

$$\times\left[-D\frac{\partial\lambda}{\partial v} - \left(\frac{\partial D}{\partial v} - D\frac{\partial \lg D''}{\partial v} + G_2 D - E_2 D''\right)\lambda + \left(G_2 - \frac{\partial \lg D''}{\partial v}\right)HW\right].$$

Queste due equazioni sono della forma:

$$(12)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial\lambda}{\partial u} = A\lambda + M \\[2ex] \dfrac{\partial\lambda}{\partial v} = B\lambda + N, \end{cases}$$

dove A, B, M, N hanno i seguenti valori:

$$A = G_1\frac{D}{D''} - E_1$$

$$B = E_2\frac{D''}{D} - G_2 - \frac{\partial}{\partial v}\lg\frac{D}{D''}$$

$$M = \frac{H}{\sqrt{E}}\,U - \frac{G_1 H}{D''}\,W$$

$$N = \frac{1}{D}\left[\frac{\partial(HW)}{\partial v} + \left(G_2 - \frac{\partial \lg D''}{\partial v}\right)HW\right] - \frac{H}{\sqrt{G}}\frac{D''}{D}V;$$

l'esistenza di una funzione λ che verifichi entrambe le (12) è con-

dizione necessaria e sufficiente affinchè le forze applicate tengano in equilibrio la rete. Se deriviamo la prima delle (12) rispetto a v e la seconda rispetto a u, e sottragghiamo membro a membro, troviamo:

$$(13) \qquad B\frac{\partial\lambda}{\partial u} - A\frac{\partial\lambda}{\partial v} + \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v}\right)\lambda + \frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v} = 0,$$

e sostituendo a $\frac{\partial\lambda}{\partial u}$ e a $\frac{\partial\lambda}{\partial v}$ i loro valori dati dalle (12) si ha:

$$(14) \qquad \left(\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v}\right)\lambda + \frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial M}{\partial v} + BM - AN = 0.$$

Se esiste una funzione λ che verifichi entrambe le (12), questa funzione deve pure verificare la (14). Ora qui si possono presentare due casi, secondo che il coefficiente di λ nella (14) è nullo identicamente oppure no. Cominciamo ad esaminare il secondo caso; supponiamo cioè che gli elementi relativi alla superficie non verifichino la relazione

$$\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} = 0,$$

la quale non è un'identità, come faremo vedere più innanzi. Siccome la (14) è lineare in λ, le (12) non hanno in questo caso più di una soluzione comune, cioè se esiste una funzione λ che soddisfi ad entrambe le (12), essa non può contenere nè funzioni nè costanti arbitrarie; tale funzione poi non potrà essere che

$$\lambda = \frac{\frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} + AN - BM}{\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v}}.$$

Ponendo per brevità

$$\frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} + AN - BM = \Omega$$

$$\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} = \omega,$$

questo valore di λ si scrive:

$$\lambda = \frac{\Omega}{\omega}. \tag{15}$$

Per ricercare la condizione cui devono soddisfare le componenti delle forze affinchè tengano in equilibrio la rete nella configurazione voluta, sostituiamo nei secondi membri delle (12) a λ il valore (15); in altre parole consideriamo le equazioni

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = A\frac{\Omega}{\omega} + M, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = B\frac{\Omega}{\omega} + N. \tag{16}$$

Se le (12) ammettono una soluzione, che dovrà essere il valore (15) di λ, questa soluzione deve pure appartenere alle (16), le quali hanno allora per integrale generale

$$\lambda = \frac{\Omega}{\omega} + c, \tag{16'}$$

essendo c una costante arbitraria. Si vede di qui che l'integrale generale delle (16), quando esiste, ha la forma (16'). Ma la condizione necessaria e sufficiente per l'integrabilità delle (16) è

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(A\frac{\Omega}{\omega} + M\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(B\frac{\Omega}{\omega} + N\right); \tag{17}$$

sicchè questa equazione riesce condizione necessaria perchè le (12) siano soddisfatte da un medesimo valore di λ, ed anzi è pure condizione sufficiente, perchè, verificandosi la (17), le (16) ammettono la soluzione (16'), il che dice appunto che si ha identicamente

$$\frac{\partial}{\partial u}\frac{\Omega}{\omega} = A\frac{\Omega}{\omega} + M, \qquad \frac{\partial}{\partial v}\frac{\Omega}{\omega} = B\frac{\Omega}{\omega} + N.$$

Se nella (17) si lasciano indeterminate le componenti delle forze U, V, W, essa rappresenta la condizione per le forze che si voleva

trovare; si vede poi che essa non è altro se non la (13), nella quale si ponga per λ il valore (15). Facendo questa sostituzione, e scrivendo pure in luogo di Ω la sua espressione, la (17) assume la forma:

$$
(17')\left\{\begin{aligned}
& B\frac{\partial^2 N}{\partial u^2}-A\frac{\partial^2 N}{\partial u\partial v}+\left(A\frac{\partial \lg\omega}{\partial v}-B\frac{\partial \lg\omega}{\partial u}-AB\right)\frac{\partial N}{\partial u}\\
& +A^2\frac{\partial N}{\partial v}-\left[B\left(\frac{\partial A}{\partial u}-A\frac{\partial \lg\omega}{\partial u}\right)-A\left(\frac{\partial A}{\partial v}-A\frac{\partial \lg\omega}{\partial v}-\omega\right)\right]N\\
& -B\frac{\partial^2 M}{\partial u\partial v}+A\frac{\partial^2 M}{\partial v^2}+B^2\frac{\partial M}{\partial u}+\left(B\frac{\partial \lg\omega}{\partial u}-A\frac{\partial \lg\omega}{\partial v}-AB\right)\frac{\partial M}{\partial v}\\
& -\left[A\left(\frac{\partial B}{\partial v}-B\frac{\partial \lg\omega}{\partial v}\right)-B\left(\frac{\partial B}{\partial u}-B\frac{\partial \lg\omega}{\partial u}+\omega\right)\right]M=0.
\end{aligned}\right.
$$

Per farvi comparire le componenti U, V, W non c'è che da sostituire a M e N i loro valori effettivi dati al principio di questo numero; il calcolo non presenta alcuna difficoltà: io non starò a scrivere l'equazione distesamente, perchè non ne farò nel seguito alcuna applicazione; limitandomi ai termini che contengono le derivate di ordine più elevato, si ha:

$$
(\mathrm{XVII})\left\{\begin{aligned}
& B\frac{\partial^3 W}{\partial u^2\partial v}-A\frac{\partial^3 W}{\partial u\partial v^2}+\ldots+\frac{D''}{\sqrt{G}}\left(B\frac{\partial^2 V}{\partial u^2}-A\frac{\partial^2 V}{\partial u\partial v}\right)\\
& \ldots-\frac{D}{\sqrt{E}}\left(B\frac{\partial^2 U}{\partial u\partial v}-A\frac{\partial^2 U}{\partial v^2}\right)+\ldots=0;
\end{aligned}\right.
$$

i termini non scritti contengono tutti le componenti U, V, W sotto indici di derivazione inferiori a quelli che compaiono nei termini messi in evidenza. Da questi termini intanto si rileva che la (XVII) è una relazione vera e propria, e mai un'identità; basta infatti notare che di quei sei termini tre per lo meno non possono annullarsi, nell'ipotesi da noi fatta che D e D'' non siano nulli, poichè se anche delle due funzioni A e B una fosse nulla, l'altra dovrebbe certamente essere diversa da zero, dovendo aversi $\dfrac{\partial B}{\partial u}-\dfrac{\partial A}{\partial v}\neq 0$. La (XVII) è poi lineare in U, V, W e nelle loro derivate, ed è

del secondo ordine rispetto alle due componenti tangenziali, mentre è del terz'ordine rispetto alla componente normale.

Ritorniamo all'equazione (14), e supponiamo che si abbia

$$(18) \qquad \frac{\partial B}{\partial u} - \frac{\partial A}{\partial v} = 0;$$

allora la (14) si scinde nella (18) e nella

$$(19) \qquad \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} + AN - BM = 0,$$

delle quali due equazioni la seconda soltanto contiene le componenti delle forze. La (19) è dunque una condizione a cui debbono necessariamente soddisfare le componenti delle forze affinchè le (12) ammettano una (almeno) soluzione comune, cioè affinchè le forze assegnate tengano in equilibrio la rete. Ma è facile vedere che essa è pure condizione sufficiente. Difatti la (18) è la condizione di integrabilità delle (12) quando è $M = N = 0$; se è verificata, la funzione λ che soddisfa alle equazioni

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = A\lambda, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = B\lambda$$

è:

$$(\alpha) \qquad \lambda = C e^{\int (A du + B dv)},$$

essendo C una costante arbitraria. Vediamo se è possibile assumere in luogo di C una tale funzione di u e v in modo che l'ultima espressione di λ soddisfi ancora alle (12) quando M e N sono diversi da zero, sempre ammettendo, naturalmente, che sia verificata la (18). Ponendo

$$d\psi = A du + B dv,$$

dalla (α) si ricava:

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} = \left(C \frac{\partial \psi}{\partial u} + \frac{\partial C}{\partial u}\right) e^{\psi}, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \left(C \frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial C}{\partial v}\right) e^{\psi};$$

sostituendo nelle (12), si hanno per C le equazioni

$$(\beta) \qquad \frac{\partial C}{\partial u} = M e^{-\psi}, \qquad \frac{\partial C}{\partial v} = N e^{-\psi},$$

la cui condizione di integrabilità è appunto la (19). Adunque se la (19) è verificata, è possibile determinare una funzione $C(u, v)$ soddisfacente alle (β), cioè tale che il valore (α) di λ soddisfi alle (12). Pertanto la (19) è condizione necessaria e sufficiente affinchè, verificandosi la relazione geometrica (18), l'equilibrio della rete abbia luogo nella configurazione voluta; ad ogni sistema di forze U, V, W che la verificano corrisponde un sistema equilibrante di forze. Più innanzi, al n° seguente, vedremo che il valore (α) di λ, ove C sia la funzione definita dalle (β), è precisamente il valore più generale di λ che verifichi le (12) quando ha luogo la (18).

Le (18) e (19) si possono scrivere distesamente, ricorrendo alle espressioni effettive di A, B, M, N; così si trova per la (18):

$$(\text{XVIII}) \qquad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \lg \frac{D}{D''} = \frac{\partial}{\partial u}\left(E_2 \frac{D''}{D} - G_2\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(G_1 \frac{D}{D''} - E_1\right),$$

e per la (19):

$$(\text{XIX}) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 W}{\partial u \partial v} + \left(G_2 - \frac{\partial}{\partial v}\lg\frac{D''}{H}\right)\frac{\partial W}{\partial u} + \left(E_1 - \frac{\partial}{\partial u}\lg\frac{D}{H}\right)\frac{\partial W}{\partial v} \\ & + \left[\left(E_1 - \frac{\partial}{\partial u}\lg\frac{D}{H}\right)\left(G_2 - \frac{\partial}{\partial v}\lg\frac{D''}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial u}\left(G_2 - \frac{\partial}{\partial v}\lg\frac{D''}{H}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(G_1 \frac{D}{D''}\right) - E_1 \right. \\ & - \frac{D''}{\sqrt{G}}\frac{\partial V}{\partial u} - \left[\frac{\partial}{\partial u}\frac{D''}{\sqrt{G}} + \frac{D''}{\sqrt{G}}\left(G_1 \frac{D}{D''} - E_1 + \frac{\partial}{\partial u}\lg\frac{D}{H}\right)\right] V \\ & - \frac{D}{\sqrt{E}}\frac{\partial U}{\partial v} - \left[\frac{\partial}{\partial v}\frac{D}{\sqrt{E}} + \frac{D}{\sqrt{E}}\left(E_2 \frac{D''}{D} - G_2 + \frac{\partial}{\partial v}\lg\frac{D''}{H}\right)\right] U = 0. \end{aligned} \right.$$

Dall'esame dei coefficienti di quest'ultima equazione si vede senz'altro che non può mai essere un'identità, poichè i coefficienti dei termini che contengono le derivate più alte di U, V, W sono certamente diversi da zero, avendo escluso il caso che D e D'' siano

nulli. A differenza della (XVII), la (XIX) è del second'ordine rispetto alla componente normale, mentre è del primo ordine rispetto alle due componenti tangenziali.

È anche bene notare che la (XVIII) non è una relazione identica, cioè non è conseguenza delle equazioni fondamentali della teoria delle superficie. Per accertarci di questo fatto prendiamo le due equazioni seguenti, conosciute sotto il nome di *formole di Codazzi* (*):

$$\frac{\partial D}{\partial v} - \frac{\partial D'}{\partial u} - F_1 D + (E_1 - F_2) D' + E_2 D'' = 0$$

$$\frac{\partial D''}{\partial u} - \frac{\partial D'}{\partial v} + G_1 D + (G_2 - F_1) D' - F_2 D'' = 0;$$

dividendo la prima per D e la seconda per D'', poi derivando la prima rapporto a u e la seconda rapporto a v, indi sottraendole membro a membro, si ottiene:

$$(20) \begin{cases} \dfrac{\partial^2}{\partial u \partial v} \lg \dfrac{D}{D''} = \dfrac{\partial}{\partial u}\left[\dfrac{1}{D}\dfrac{\partial D'}{\partial u} + F_1 - (E_1 - F_2)\dfrac{D'}{D} - E_2 \dfrac{D''}{D}\right] \\ \qquad - \dfrac{\partial}{\partial v}\left[\dfrac{1}{D''}\dfrac{\partial D'}{\partial v} + F_2 - (G_2 - F_1)\dfrac{D'}{D''} - G_1 \dfrac{D}{D''}\right], \end{cases}$$

relazione che è soddisfatta identicamente. Tenendo conto della (20), nonchè delle identità

$$\frac{\partial \lg H}{\partial u} = E_1 + F_2, \qquad \frac{\partial \lg H}{\partial v} = G_2 + F_1,$$

donde

$$\frac{\partial (E_1 + F_2)}{\partial v} = \frac{\partial (G_2 + F_1)}{\partial u},$$

(*) Vedi ad es. il trattato già citato del Bianchi, pag. 91.

la (XVIII) diventa:

$$(\mathrm{XVIII})' \quad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left[(E_1 - F_2)\dfrac{D'}{D} + 2E_2\dfrac{D''}{D} - \dfrac{1}{D}\dfrac{\partial D'}{\partial u}\right] \\ = \dfrac{\partial}{\partial v}\left[(G_2 - F_1)\dfrac{D'}{D''} + 2G_1\dfrac{D}{D''} - \dfrac{1}{D''}\dfrac{\partial D'}{\partial v}\right]. \end{cases}$$

Se questa fosse un'identità, lo sarebbe anche in ogni caso particolare; ad es. per $D' = 0$ dovrebbe essere soddisfatta identicamente la relazione

$$(21) \qquad \frac{\partial}{\partial u}\left(E_2\frac{D''}{D}\right) = \frac{\partial}{\partial v}\left(G_1\frac{D}{D''}\right),$$

la quale ha un significato geometrico molto semplice. Imaginiamo difatti di fare la rappresentazione sferica della nostra rete al modo di Gauss, e diciamo E'_1, E'_2,... le quantità analoghe ad E_1, E_2,..., calcolate per l'imagine sferica; consideriamo poi le seguenti formole, valevoli in ogni caso, dovute al signor Weingarten, e riportate dal Bianchi in una nota a pag. 123 delle sue Lezioni:

$$\frac{\partial D'}{\partial u} = E_1 D' + E_2 D'' + F'_1 D + F'_2 D'$$

$$\frac{\partial D'}{\partial v} = G_1 D + G_2 D' + F'_1 D' + F'_2 D''.$$

Per $D' = 0$ esse diventano:

$$E_2 D'' + F'_1 D = 0, \qquad G_1 D + F'_2 D'' = 0,$$

e da queste si deduce:

$$E_2\frac{D''}{D} = -F'_1, \qquad G_1\frac{D}{D''} = -F'_2;$$

sostituendo nella (21), essa si riduce a

$$(21') \qquad \frac{\partial F'_1}{\partial u} = \frac{\partial F'_2}{\partial v},$$

e questa secondo un teorema del prof. Dini (*) esprime la condizione necessaria e sufficiente affinchè le linee sferiche (u, v) siano le imagini delle assintotiche di un'altra superficie, la cui curvatura risulta determinata a meno di un fattore costante arbitrario; una volta poi fissata la curvatura, la superficie stessa è definita per quadrature a meno di un'omotetia. Dopo questo non può più rimanere il dubbio che la (XVIII) sia un'identità; inoltre siamo anche riusciti a riconoscere una vasta classe di superficie che rientrano nell'insieme di tutte quelle definite dall'equazione medesima, e sono le superficie sulle quali esiste un sistema doppio coniugato la cui imagine sferica è pure l'imagine delle assintotiche di un'altra superficie. Una rete avente la forma di una di queste superficie, coi fili disposti secondo quel tal sistema coniugato sta in equilibrio a condizione che le forze applicate verifichino l'equazione differenziale (XIX).

La (21) è soddisfatta, in particolare, se si suppone $E_2=G_1=0$, cioè se i fili, oltrechè essere linee coniugate, sono pure geodetiche (**); le superficie che hanno un sistema di linee coniugate formate da geodetiche sono le cosidette *superficie di Voss*, le quali si presentano nello studio di quelle congruenze le cui sviluppabili tagliano le superficie focali secondo le loro linee di curvatura (congruenze di Guichard): il sistema coniugato di una superficie di Voss, che è formato da geodetiche, ha per imagine sferica un sistema che è pure l'imagine delle assintotiche di una superficie pseudosferica. La (21) dà luogo ad un altro caso particolare di equilibrio ponendovi $F=0$, onde i fili della rete vengono ad essere le sue linee di curvatura; la (21′) diventa allora:

$$(21'') \qquad \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \lg \sqrt{\frac{E'}{G'}} = 0,$$

(*) Vedi Bianchi, l. c., pag. 122.

(**) La curvatura geodetica delle linee u e v è rispettivamente:

$$\frac{1}{\rho_u} = \frac{H}{E\sqrt{E}} E_2, \quad \frac{1}{\rho_v} = \frac{H}{G\sqrt{G}} G_1;$$

di qui risulta che l'essere $E_2=0$ oppure $G_1=0$ esprime che sono geodetiche le linee u o v rispettivamente.

indicando con E', G' le quantità analoghe a E, G calcolate per l'elemento lineare sferico. Dalla (21'') segue che il rapporto di E' a G' è eguale al rapporto di una funzione della sola u ad una funzione della sola v, cioè che le linee sferiche (u, v) formano un sistema ortogonale isotermo; allora la superficie, le cui assintotiche hanno quell'imagine sulla sfera, è ad area minima. Fra le superficie definite dall'equazione (XVIII) sono dunque comprese quelle le cui linee di curvatura hanno per imagine sferica un sistema isotermo, cioè un sistema che è pure l'imagine delle assintotiche di una superficie minima.

Ricorrendo alla teoria delle deformazioni infinitesime di una superficie flessibile ed inestendibile possiamo dare un'altra interpretazione della (21). È noto difatti che in ogni deformazione infinitesima di una superficie flessibile ed inestendibile esiste un sistema coniugato (reale od imaginario) che rimane coniugato dopo la deformazione; questo sistema ha per imagine sferica un sistema che è pure l'imagine delle assintotiche di un'altra superficie, la quale è l'*associata* alla prima nella deformazione. La (21) esprime adunque la proprietà che hanno i fili della nostra rete di costituire quel sistema coniugato che si mantiene coniugato in una certa flessione infinitesima della rete.

Dopo d'avere stabilito la condizione cui devono soddisfare le componenti delle forze nel caso più generale, in cui i fili della rete non sono linee assintotiche, sarà bene di esaminare anche il caso prima escluso. Brevemente d'ora innanzi indicherò con $\Phi = 0$ quella relazione di condizione qualunque essa sia; vedremo che in questi nuovi casi l'ordine della $\Phi = 0$ si abbassa sempre al disotto del terzo. Ammettiamo che siano assintotiche le linee u; sarà allora $D = 0$. L'ultima delle (2) dà:

$$\mu = \frac{H W}{D''},$$

da cui si ha:

$$\frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{H}{D''}\left[\frac{\partial W}{\partial v} - \left(\frac{\partial}{\partial v} \log \frac{D''}{H}\right) W\right];$$

sostituendo nella seconda delle (2), e supponendo che sia $E_2 \neq 0$, cioè che le linee u non siano rette, si potrà ricavare λ, che sarà

$$\lambda = \frac{H}{E_2\sqrt{G}}V - \frac{H}{E_2 D''}\left[\frac{\partial W}{\partial v} + \left(G_2 - \frac{\partial}{\partial v}\lg\frac{D''}{H}\right)W\right];$$

di qui si può formare $\frac{\partial\lambda}{\partial u}$, ed allora sostituendo nella prima delle (2) i valori di λ, μ, $\frac{\partial\lambda}{\partial u}$ che abbiamo trovato, veniamo ad avere l'equazione voluta $\Phi = 0$. Essa, moltiplicata per $-\frac{E_2 D''}{H}$, è la seguente:

$$\text{XII)}\quad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 W}{\partial u\partial v} + \left[G_2 - \frac{\partial}{\partial v}\lg\frac{D''}{H}\right]\frac{\partial W}{\partial u} + \left[E_1 - \frac{\partial}{\partial u}\lg\frac{E_2 D''}{H}\right]\frac{\partial W}{\partial v} \\ &+ \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(G_2 - \frac{\partial}{\partial v}\lg\frac{D''}{H}\right) + \left(E_1 - \frac{\partial}{\partial u}\lg\frac{E_2 D''}{H}\right)\left(G_2 - \frac{\partial}{\partial v}\lg\frac{D''}{H}\right) - E_2 G_1\right]W \\ &- \frac{D''}{\sqrt{G}}\frac{\partial V}{\partial u} - \frac{D''}{\sqrt{G}}\left(E_1 - \frac{\partial}{\partial u}\lg\frac{E_2\sqrt{G}}{H}\right)V + \frac{E_2 D''}{\sqrt{E}}U = 0. \end{aligned}$$

Questa equazione mostra che, fissando le componenti tangenziali, la componente normale dipende da un'equazione del 2° ordine della forma di Laplace, e bisognerà fare nei singoli casi l'esame dei coefficienti per vedere se è possibile calcolarla in modo che l'equilibrio sussista. Invece se si prende comunque la componente W, il sistema tangenziale si può sempre determinare; in particolare assumendo ad arbitrio insieme con W la componente V, la componente diretta secondo le linee assintotiche risulta determinata in modo unico. Se le forze sono tangenziali e le linee v non sono assintotiche, le U e V verificano l'equazione

$$\text{(XXII)}'\quad \frac{\partial V}{\partial u} + \left(E_1 - \frac{\partial}{\partial u}\lg\frac{E_2\sqrt{G}}{H}\right)V - E_2\sqrt{\frac{G}{E}}\,U = 0.$$

Quando le linee u fossero rette, cioè si avesse, oltre a $D = 0$, anche $E_2 = 0$, la $\Phi = 0$ si ottiene molto facilmente; basta ricavare

μ dalla terza delle (2), formare $\frac{\partial \mu}{\partial v}$ e sostituire nella seconda; con questo si ottiene:

$$\frac{\partial W}{\partial v} + \left(G_1 - \frac{\partial}{\partial v} \lg \frac{D''}{H}\right) W - \frac{D''}{\sqrt{G}} V = 0.$$

Per le superficie rigate adunque la $\Phi = 0$ non contiene la componente delle forze secondo i fili rettilinei; fissando ad arbitrio, insieme con questa componente, anche la W, la rimanente risulta perfettamente determinata. Facendo nell'ultima equazione $W = 0$, nell'ipotesi che sia $D'' \neq 0$, si trova $V = 0$; cioè se una rete, avente un sistema di fili rettilinei, sta in equilibrio sotto l'azione di forze tangenziali, ed i fili non rettilinei non sono assintotiche, le forze applicate sono dirette secondo i fili rettilinei. Questo teorema si era già incontrato al n° 4.

Il caso in cui si abbia $D = D'' = 0$ corrisponde all'essere entrambi i sistemi di fili formati da assintotiche; allora la terza delle (2) dà $W = 0$, cioè se in una rete in equilibrio i fili (o, più generalmente, due sistemi di linee coniugati rispetto alle tensioni) sono le assintotiche della superficie, le forze applicate sono necessariamente tangenti ad essa.

Si ha così l'inverso del teorema del Lecornu, che abbiamo visto al n° 4. L'equazione $W = 0$ è ciò a cui si riduce in questo caso la $\Phi = 0$; e difatti la (XXII), che è la $\Phi = 0$ quando è $D = 0$, allorchè W è nulla si riduce a

$$\frac{D''}{\sqrt{G}} \left[\frac{\partial V}{\partial u} + \left(E_1 - \frac{\partial}{\partial u} \lg \frac{E_2 \sqrt{G}}{H}\right) V - E_2 \sqrt{\frac{G}{E}}\, U\right] = 0,$$

e questa è soddisfatta da $D'' = 0$, mentre invece per $D'' \neq 0$ si renderebbe necessario il verificarsi della (XXII)'; da ciò segue che se i fili sono linee assintotiche, si può mantenere l'equilibrio mediante un sistema qualunque di forze applicate, purchè siano tangenziali.

Quando è assegnata ad una rete la configurazione di equilibrio,

e si è calcolato un sistema di funzioni U, V, W che soddisfano alla corrispondente equazione $\Phi = 0$, si può dire che le condizioni di equilibrio relative ai punti interni sono soddisfatte, poichè allora è possibile determinare due funzioni λ, μ che verifichino le equazioni indefinite (2). Affinchè l'equilibrio sussista bisognerà ancora che siano soddisfatte le equazioni ai limiti (2_1); bisognerà cioè applicare al contorno delle forze, le cui componenti sono date dalle (2_1), e che si sapranno calcolare una volta che si siano integrate le (2) rispetto a λ e μ (*). Il calcolo di λ e μ sarà trattato nel n° seguente. Un'osservazione piuttosto, che si può fare riguardo alle forze al contorno, è questa, che, quando sia verificata la $\Phi = 0$ per parte delle forze applicate nei punti interni, le condizioni al contorno sono quelle stesse come se la superficie che si considera fosse inestendibile, e soggetta alle stesse forze U, V, W. La cosa è evidente, e risulta dal fatto che se una rete in equilibrio perde la sua estendibilità, le linee u, v continuano ad essere coniugate rispetto alle tensioni, onde le equazioni dell'equilibrio, anche quelle ai limiti, coincidono con quelle della primitiva rete.

VII.

Si è già visto che la conoscenza delle tensioni superficiali si riduce, in sostanza, a conoscere i valori di λ e μ in ogni punto della rete. Nel caso più generale di equilibrio il calcolo di λ e μ si fa in un modo molto semplice. Fu dimostrato infatti nel n° precedente che quando è $DD'' \neq 0$ ed inoltre $\omega \neq 0$, esiste una sola funzione λ che soddisfa alle (12) per ogni determinato sistema di funzioni U, V, W, e questa λ è data dalla (14). Per avere μ non ci sarà che da sostituire il valore trovato di λ nella terza delle (2), e risolvere rispetto a μ. In questo caso adunque il calcolo delle tensioni si fa con sole operazioni di derivazione e con calcoli algebrici.

Anche quando è $\omega = 0$ il problema è già risolto in parte, in

(*) Se la rete è chiusa, le condizioni ai limiti non intervengono, e quindi l'unica condizione per l'equilibrio è che le componenti delle forze applicate verifichino la $\Phi = 0$.

quanto s'è fatto vedere che se la (19) è verificata, le (12) sono soddisfatte da ogni funzione λ data dalle (α), essendo $C(u, v)$ definita dalle (β). Rimane da dimostrare che quella funzione è la più generale che possa verificare le (12). Per questo osserviamo che, introducendo la funzione ψ, le (12) e la (19) diventano rispettivamente:

$$(12') \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial u} = \frac{\partial \psi}{\partial u}\lambda + M, \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial v} = \frac{\partial \psi}{\partial v}\lambda + N,$$

$$(19') \qquad N\frac{\partial \psi}{\partial u} - M\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} = 0;$$

queste dicono che la ψ che figura nelle (12') è un integrale particolare della (19'); ora se si elimina ψ fra queste tre equazioni (e per questo basta ricavare $\frac{\partial \psi}{\partial u}$ e $\frac{\partial \psi}{\partial v}$ dalle due prime e sostituire nella terza), si ha per λ l'equazione:

$$(\gamma) \qquad N\frac{\partial \lg \lambda}{\partial u} - M\frac{\partial \lg \lambda}{\partial v} + \frac{\partial M}{\partial v} - \frac{\partial N}{\partial u} = 0.$$

L'integrale generale della (γ) non sarà la soluzione comune alle (12'), ma però questa soluzione comune verifica certamente la (γ); sicchè essa sarà della medesima forma che quell'integrale generale. Della (γ) noi conosciamo già un integrale particolare, che è e^{ψ}, come risulta dalla (19'); prendendo allora come nuova funzione incognita nella (γ) la funzione λ' definita dalla relazione

$$\lg \lambda = \psi + \lambda',$$

la (γ) si riduce all'altra

$$(\gamma') \qquad N\frac{\partial \lambda'}{\partial u} - M\frac{\partial \lambda'}{\partial v} = 0.$$

Indichiamo con $\lambda' = f(u, v)$ il suo integrale generale; potremo

quindi porre l'integrale generale della (γ) sotto la forma

$$(\delta) \qquad \lambda = e^{\psi} f(u, v),$$

cioè ogni funzione che verifichi la (γ) si ottiene moltiplicando e^{ψ} per un integrale della (γ'). Ora se noi calcoliamo $C(u, v)$ mediante le (β), troviamo che il valore (α) di λ è

$$(\varepsilon) \qquad \lambda = e^{\psi}\left[\int e^{-\psi}(M du + N dv) + k\right],$$

essendo k una costante arbitraria, e la forma del secondo membro è proprio quella del secondo membro della (δ); invero la ($19'$) dice che $e^{-\psi}$ è un fattore integrante di $M du + N dv$, e quindi

$$\lambda' = \int e^{-\psi}(M du + N dv) + k$$

è un integrale della (γ'), poichè questa è equivalente alla

$$M du + N dv = 0.$$

D'altronde la funzione $C(u, v)$ fu determinata in modo che fosse la più generale possibile compatibilmente coll'essere $C\, e^{\psi}$ una soluzione delle ($12'$). Si conclude che la funzione più generale, che verifichi entrambe le (12) quando è $\omega = 0$, è appunto quella data dalla formola (ε). Nota λ, l'espressione corrispondente di μ si ha subito dalla terza delle (2), la quale dà:

$$\mu = \frac{1}{D''}\left\{H W - D e^{\psi}\left[\int e^{-\psi}(M du + N dv) + k\right]\right\}.$$

Supponiamo ora che D e D'' non siano più entrambi diversi da zero. Se ad es. è $D = 0$, il calcolo di λ e μ fu già fatto effettivamente al n° 6 nell'ipotesi che sia $E_2 \neq 0$, cioè nell'ipotesi che le linee u siano assintotiche, ma non rette; si trovò allora:

$$\lambda = \frac{H}{E_2\sqrt{G}} V - \frac{H}{E_2 D''}\left[\frac{\partial W}{\partial v} + \left(G_2 - \frac{\partial}{\partial v}\lg\frac{D''}{H}\right) W\right], \quad \mu = \frac{H}{D''} W;$$

non contenendo nessuna quantità arbitraria, la coppia di funzioni λ e μ è individuata da ogni sistema di forze equilibranti. Se poi oltre a $D=0$ fosse anche $E_2=0$, una volta ottenuta μ dalla terza delle (2), per avere λ bisogna sostituire μ nella prima, e allora da questa si ha:

$$\lambda = e^{-\int E_1 du}\left[\int H\left(\frac{U}{\sqrt{E}} - \frac{G_1}{D''}W\right)e^{\int E_1 du}\,du + \alpha(v)\right],$$

essendo α una funzione arbitraria della sola v; sicchè rimane individuata la tensione che agisce sui fili rettilinei, ma non così la tensione sugli altri fili; inoltre quest'ultima richiede, per la sua determinazione, l'uso di quadrature.

Un caso assai notevole si presenta quando sono nulli ad un tempo D e D'', cioè i fili della rete sono linee assintotiche. In tal caso la terza delle (2) si riduce a $W=0$, e le funzioni λ e μ si debbono ricavare dalle equazioni

$$(23)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial\lambda}{\partial u} + E_1\lambda + G_1\mu - P = 0 \qquad \left(P = \frac{H}{\sqrt{E}}U\right)\\ &\frac{\partial\mu}{\partial v} + E_2\lambda + G_2\mu - Q = 0. \qquad \left(Q = \frac{H}{\sqrt{G}}V\right)\end{aligned}\right.$$

Non vi ha difficoltà a calcolare λ e μ se uno almeno dei due sistemi di fili è formato da rette, poichè allora, essendo o $G_1=0$ o $E_2=0$, siamo ridotti all'integrazione di due equazioni lineari del primo ordine. Escluso questo caso, eliminiamo fra le (23) la funzione μ, ricavandola dalla prima e sostituendola nella seconda; si ha

$$\mu = \frac{1}{G_1}\left(P - \frac{\partial\lambda}{\partial u} - E_1\lambda\right);$$

calcolando $\frac{\partial\mu}{\partial v}$ e facendo la sostituzione si trova l'equazione in λ:

$$(A)\qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2\lambda}{\partial u\,\partial v} - \left(G_2 - \frac{\partial\log G_1}{\partial v}\right)\frac{\partial\lambda}{\partial u} + E_1\frac{\partial\lambda}{\partial v}\\ &+\left(\frac{\partial E_1}{\partial v} - E_1\frac{\partial\log G_1}{\partial v} - E_1 G_2 - E_2 G_1\right)\lambda = R,\end{aligned}$$

essendosi posto

$$R = \frac{\partial P}{\partial v} - P \frac{\partial \lg G_1}{\partial v} + G_2 P - G_1 Q.$$

L'equazione (A) ha la forma caratteristica di Laplace; i suoi invarianti sono:

$$h = -\frac{\partial^2 \lg G_1}{\partial u \partial v} + E_2 G_1 + \frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial E_1}{\partial v}, \quad k = E_2 G_1.$$

Il primo invariante si semplifica, poichè nelle nostre ipotesi è identicamente $\frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial E_1}{\partial v} = 0$. Difatti si hanno in ogni caso le identità, già impiegate per dedurre la (XVIII)':

$$\frac{\partial \lg H}{\partial u} = E_1 + F_2, \qquad \frac{\partial \lg H}{\partial v} = G_2 + F_1,$$

dalle quali segue:

$$(24) \qquad \frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial E_1}{\partial v} = \frac{\partial F_2}{\partial v} - \frac{\partial F_1}{\partial u};$$

d'altra parte per essere $D = D'' = 0$ le equazioni di Codazzi si riducono a

$$\frac{\partial D'}{\partial u} = (E_1 - F_2) D', \qquad \frac{\partial D'}{\partial v} = (G_2 - F_1) D',$$

da cui si ricava:

$$\frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial E_1}{\partial v} = \frac{\partial F_1}{\partial u} - \frac{\partial F_2}{\partial v}:$$

sommando membro a membro quest'ultima colla (24) si ha, come

si era asserito:

$$\frac{\partial G_2}{\partial u} - \frac{\partial E_1}{\partial v} = 0.$$

Avremo dunque per gli invarianti della (A):

$$h = E_2 G_1 - \frac{\partial^2 \lg G_1}{\partial u \partial v}, \qquad k = E_2 G_1.$$

L'annullarsi di h o di k ridurrebbe, come è noto, la ricerca di λ all'integrazione di un'equazione del 1° ordine; quanto alla condizione $k = 0$, abbiamo già visto che cosa significhi, e come allora non sia necessario di passare attraverso ad un'equazione di Laplace, ma si possa ricavare λ e μ direttamente dalle (23). Se non è soddisfatta la $h = 0$, si faccia la sostituzione:

$$\text{(25)} \qquad \frac{\partial \lambda}{\partial v} + \left(G_2 - \frac{\partial \lg G_1}{\partial v}\right)\lambda = \lambda_1;$$

la (A) diventa

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial u} + E_1 \lambda_1 - h\lambda = R,$$

ed eliminando λ fra questa e la (25), si trova che λ_1 dipende essa pure da un'equazione di Laplace

$$\text{(A}_1\text{)} \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial^2 \lambda_1}{\partial u \partial v} + \left(G_2 - \frac{\partial}{\partial v} \lg h G_1\right)\frac{\partial \lambda_1}{\partial u} + E_1 \frac{\partial \lambda_1}{\partial v} \\ &+ \left[\frac{\partial E_1}{\partial v} + E_1\left(G_2 - \frac{\partial}{\partial v} \lg h G_1\right) - h\right]\lambda_1 = R_1, \end{aligned}$$

essendosi posto

$$R_1 = \frac{\partial R}{\partial v} + R\left(G_2 - \frac{\partial}{\partial v} \lg h G_1\right);$$

gli invarianti della (A_1) sono

$$h_1 = h - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \lg h G_1, \qquad k_1 = h.$$

Si può eseguire sulla (A_1) una sostituzione analoga alla precedente eseguita sulla (A), e si troverebbe una nuova equazione (A_2) avente la stessa forma delle due prime, ed i cui invarianti sono

$$h_2 = h_1 - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \lg (h h_1 G_1), \qquad k_2 = h_1.$$

Queste operazioni si possono prolungare a volontà, e si troverebbe così una serie di condizioni

$$h = 0, \qquad h_1 = 0, \qquad h_2 = 0, \ldots$$

fra i coefficienti E, F, G, tali che se una di esse è verificata, il calcolo delle tensioni dipende da equazioni del prim'ordine. Osservando il modo di formazione degli invarianti h, h_1, h_2, ... si vede facilmente che quello corrispondente all'equazione (A_i) è

$$h_i = h_{i-1} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \lg (h h_1 \ldots h_{i-1}) - \frac{\partial^2 \lg G_1}{\partial u \partial v}.$$

Invece di eseguire sulla (A) la sostituzione (25) e poi, sulle equazioni successive, le sostituzioni analoghe, si potrebbe invece eseguire l'altra

$$\frac{\partial \lambda}{\partial u} + E_1 \lambda = \lambda_{-1}; \tag{26}$$

con questo si otterrebbe per λ_{-1} un'equazione (A_{-1}) i cui invarianti sono

$$h_{-1} = E_2 G_1, \qquad k_{-1} = E_2 G_1 - \frac{\partial^2 \lg E_2}{\partial u \partial v}.$$

Assoggettando la (A_{-1}) ad una sostituzione del tipo della (26), la nuova funzione incognita viene a dipendere da un'equazione (A_{-2}) della stessa forma di Laplace, avente per secondo invariante

$$k_{-2} = k_{-1} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \lg (k_{-1} E_2);$$

e continuando a fare analoghe sostituzioni, si trova facilmente per l'equazione generale (A_{-r}) un invariante

$$k_{-r} = k_{-(r-1)} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \lg (k_{-1} k_{-2} \ldots k_{-r+1}) - \frac{\partial^2 \lg E_2}{\partial u \partial v}.$$

Le due serie di invarianti h e k costruiti per l'equazione (A) e le sue trasformate mediante le sostituzioni del tipo (25) oppure (26) non formano due serie distinte, come si sa dalla teoria generale dell'equazione di Laplace, ma formano un'unica serie estesa indefinitamente nei due sensi, essendo

$$h_i = k_{i+1};$$

tenendo conto di questa eguaglianza, come pure delle espressioni date per h_i e k_{-r}, possiamo mettere a riscontro i valori di due k con indici eguali e di segno opposto; abbiamo così:

$$k_i = k_{i-1} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \lg (k_1 k_2 \ldots k_{i-1}) - \frac{\partial^2 \lg G_1}{\partial u \partial v}$$

$$k_{-i} = k_{-(i-1)} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \lg (k_{-1} k_{-2} \ldots k_{-(i-1)}) - \frac{\partial^2 \lg E_2}{\partial u \partial v}.$$

Indicherò brevemente con (K) la serie

$$\ldots k_{-r} \ldots k_{-1} k k_1 \ldots k_i \ldots;$$

il significato analitico dei suoi termini l'abbiamo già veduto: l'an-

nullarsi di uno qualunque di essi dice che l'integrazione della (A) si può ricondurre all'integrazione di equazioni del primo ordine.

Ora importa notare come la serie delle relazioni $k_i = 0$ si possa fare a meno di intenderla come estesa nei due sensi, ma si possa invece far procedere nell'un senso o nell'altro, indifferentemente, a partire dalla $k = 0$. Difatti, basta notare che se si fa lo scambio di u con v, le funzioni E_2 e G_1 si scambiano l'una nell'altra; per quello scambio allora k rimane inalterato; inoltre il semplice confronto di k_1 e k_{-1} dice che avviene lo scambio dell'uno nell'altro, e così pure si scambiano k_2 e k_{-2}. In generale, per effetto dello scambio di u con v, k_i diventa k_{-i} e viceversa; di modo che lo studio delle condizioni $k_i = 0$ si può limitare alla serie che corrisponde a prendere l'indice i positivo; le formole ed i risultati relativi alle $k_{-i} = 0$ si otterranno da quelli che si riferiscono alle $k_i = 0$ mediante lo scambio delle due variabili.

L'equazione $k_i = 0$, in quanto è una relazione fra E, F, G, definisce una certa proprietà della superficie considerata, che non varia per flessione; la sua forma complicata non permette però di determinare questa proprietà in modo facile. Mi limiterò quindi a far vedere come si possa trasformare, introducendovi la curvatura geodetica dei fili.

Lasciando da parte l'equazione $k = 0$, la quale non ci darebbe più nulla di nuovo, prendiamo la $k_1 = 0$, ossia l'equazione

$$E_2 G_1 - \frac{\partial^2 \lg G_1}{\partial u \partial v} = 0.$$

Chiamando $\dfrac{1}{\rho_u}$ e $\dfrac{1}{\rho_v}$ le curvature geodetiche delle linee u e v, si hanno le note formole

$$\frac{1}{\rho_u} = \frac{H}{E\sqrt{E}} E_2, \qquad \frac{1}{\rho_v} = \frac{H}{G\sqrt{G}} G_1,$$

da cui:

$$E_2 = \frac{1}{\rho_u} \frac{E\sqrt{E}}{H}, \qquad G_1 = \frac{1}{\rho_v} \frac{G\sqrt{G}}{H},$$

e quindi:

$$E_2\, G_1 = \frac{1}{\rho_u \rho_v} \frac{EG\sqrt{EG}}{H^2},$$

ovvero, indicando con θ l'angolo delle linee u, v:

$$E_2\, G_1 = \frac{1}{\rho_u \rho_v} \frac{\sqrt{EG}}{\operatorname{sen}^2\theta}.$$

Osservando poi che è:

$$\frac{\partial^2 \lg G_1}{\partial u \partial v} = \frac{1}{G_1} \frac{\partial^2 G_1}{\partial u \partial v} - \frac{1}{G_1^2} \frac{\partial G_1}{\partial u} \frac{\partial G_1}{\partial v},$$

la $k_1 = 0$ si scrive:

$$\frac{1}{\rho_u \rho_v} \frac{\sqrt{EG}}{\operatorname{sen}^2\theta} + \frac{1}{\rho_v} \frac{\partial^2 \rho_v}{\partial u \partial v} - \frac{1}{\rho_v^2} \frac{\partial \rho_v}{\partial u} \frac{\partial \rho_v}{\partial v} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \lg \frac{G\sqrt{G}}{H}.$$

Così pure introducendo ρ_u e ρ_v nell'espressione di k_2, si ha:

$$k_2 = \frac{1}{\rho_u \rho_v} \frac{\sqrt{EG}}{\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \lg \left[G_1^2 \left(\frac{1}{\rho_u \rho_v} \frac{\sqrt{EG}}{\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{\partial^2 \lg G_1}{\partial u \partial v} \right) \right];$$

ed analogamente:

$$k_3 = \frac{1}{\rho_u \rho_v} \frac{\sqrt{EG}}{\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \lg \left\{ G_1^3 \left(\frac{1}{\rho_u \rho_v} \frac{\sqrt{EG}}{\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{\partial^2 \lg G_1}{\partial u \partial v} \right)^2 \times \right.$$
$$\left. \times \left[\frac{1}{\rho_u \rho_v} \frac{\sqrt{EG}}{\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \lg G_1^2 \left(\frac{1}{\rho_u \rho_v} \frac{\sqrt{EG}}{\operatorname{sen}^2\theta} - \frac{\partial^2 \lg G_1}{\partial u \partial v} \right) \right] \right\}.$$

È inutile che io scriva le espressioni di k_4, k_5, ...; da quell scritte si vede chiaramente come si possono costruire.

Vediamo in particolare come si semplificano queste formol quando sia $F = 0$; siccome le linee coordinate sono le assintotiche

la superficie è allora ad area minima, e si sa che su una tal superficie le linee assintotiche formano un sistema isotermo, onde possiamo imaginare di avere cambiati i parametri u e v in modo da rendere $E = G$. Posto

$$E = G = e^{2a},$$

si ha:

$$H = e^{2a}, \qquad E_2 = -\frac{\partial a}{\partial v}, \qquad G = -\frac{\partial a}{\partial u},$$

$$k = E_2 G_1 = \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial v},$$

$$k_1 = \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial v} - \frac{1}{\frac{\partial a}{\partial u}}\frac{\partial^3 a}{\partial u^2 \partial v} + \frac{1}{\left(\frac{\partial a}{\partial u}\right)^2}\frac{\partial^2 a}{\partial u^2}\frac{\partial^2 a}{\partial u \partial v}$$

$$k_2 = \frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial v} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\lg\left[\left(\frac{\partial a}{\partial u}\right)^2\left(\frac{\partial a}{\partial u}\frac{\partial a}{\partial v} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\lg\frac{\partial a}{\partial u}\right)\right]$$

. . . .

Introducendo la curvatura geodetica dei fili abbiamo:

$$E_2 = \frac{e^a}{\rho_u}, \qquad G_1 = \frac{e^a}{\rho_v},$$

$$k = \frac{e^{2a}}{\rho_u \rho_v},$$

$$k_1 = \frac{e^{2a}}{\rho_u \rho_v} - \frac{\partial^2 a}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\lg\frac{1}{\rho_v},$$

$$k_2 = \frac{e^{2a}}{\rho_u \rho_v} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left\{2a + \lg\frac{1}{\rho_v^2}\left[\frac{e^{2a}}{\rho_u \rho_v} - \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}\left(a + \lg\frac{1}{\rho_v}\right)\right]\right\}.$$

. . . .

Neppure qui le espressioni che si ottengono per le k_i sono tali da prestarsi all'interpretazione geometrica delle equazioni $k_i = 0$.

Il metodo di Laplace, al quale ora abbiamo accennato, applicato all'equazione (A) non riesce se non quando è nullo un termine della serie (K). Supponiamo che dopo avere eseguito un certo numero di sostituzioni analoghe alla (25) si giunga ad un'equazione che si possa integrare col metodo di Laplace. Sia questa l'equazione (A_i), per la quale si abbia $k_{i+1} = 0$; il valore corrispondente di λ_i si ottiene allora facendo sulla (A_i) la sostituzione

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial v} + \left[G_2 - \frac{\partial}{\partial v} \lg (k_1 \ldots k_i G_2)\right] \lambda_i = \lambda_{i+1};$$

col che la (A_i) si riduce, nell'ipotesi che k_{i+1} sia nullo, alla seguente:

$$\frac{\partial \lambda_{i+1}}{\partial u} + E_1 \lambda_{i+1} = R_i.$$

Sarà bene qui tener conto dell'identità $\frac{\partial E_1}{\partial v} = \frac{\partial G_2}{\partial u}$, la quale esprime che E_1 e G_2 sono le derivate, rispetto a u e a v, di una medesima funzione φ, cioè che è

$$E_1 = \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \qquad G_2 = \frac{\partial \varphi}{\partial v}.$$

Allora le due ultime equazioni si scrivono:

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v}[\varphi - \lg (k_1 \ldots k_i G_2)] \lambda_i = \lambda_{i+1}$$

$$(27) \qquad \frac{\partial \lambda_{i+1}}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u} \lambda_{i+1} = R_i;$$

dalla (27) si ricava

$$\lambda_{i+1} = e^{-\varphi}\left[\int R_i e^{\varphi} du + \beta(v)\right],$$

essendo β una funzione arbitraria della sola v; λ_i sarà quindi dato dall'equazione

$$(28) \quad \frac{\partial \lambda_i}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v}[\varphi - \lg(k_1 \ldots k_i G_1)]\lambda_i = e^{-\varphi}\left[\int R_i e^{\varphi} du + \beta(v)\right],$$

da cui si ha

$$\lambda_i = k_1 \ldots k_i G_1 e^{-\varphi}\left[\alpha(u) + \int \frac{\beta(v) + \int R_i e^{\varphi} du}{k_1 \ldots k_i G_1} dv\right],$$

dove α è funzione arbitraria della sola u. Una volta ottenuto λ_i, si ha immediatamente λ_{i-1} dall'equazione

$$\frac{\partial \lambda_i}{\partial u} + \frac{\partial \varphi}{\partial u}\lambda_i - k_i \lambda_{i-1} = R_{i-1},$$

e applicando successivamente questa formola di riduzione si calcola λ_{i-2}, λ_{i-3}, ... e finalmente λ; si vede poi senz'altro che λ viene, espressa come funzione lineare di λ_i e delle sue derivate successive rispetto a u fino alla i^{ma}; è cioè della forma

$$\lambda = A + A_0 \lambda_i + A_1 \frac{\partial \lambda_i}{\partial u} + \ldots + A_i \frac{\partial^i \lambda_i}{\partial u^i}.$$

Le due funzioni arbitrarie $\alpha(u)$ e $\beta(v)$, che furono introdotte nell'integrazione delle equazioni (27) e (28), verranno pure a riprodursi, insieme colle loro derivate, nell'espressione di λ.

Dall'esame dei diversi casi, in cui abbiamo ottenuto i valori di λ e μ corrispondenti ad un certo stato di equilibrio, si vede che possono accadere due diversi fatti: o le equazioni (2) determinano perfettamente λ e μ, oppure queste due funzioni rimangono determinate solo a meno di costanti o di funzioni arbitrarie. Il primo fatto si verifica nel caso più generale, vale a dire quando i fili della rete non sono assintotiche e non è verificata la relazione geometrica $\omega = 0$, come pure quando uno solo dei due sistemi di fili è formato da assintotiche, che però non siano rette; il secondo fatto succede in tutti gli altri casi. Il risultare λ e μ determinate dalle equazioni

(2) ha per conseguenza che le (2_{1}) forniscono un solo sistema di forze (U_{1}, V_{1}) da applicarsi al contorno affinchè l'equilibrio abbia luogo; se invece λ e μ contengono delle quantità arbitrarie, sostituendole nelle (2_{1}) anche le componenti U_{1}, V_{1} vengono ad essere definite con una certa arbitrarietà, sicchè sarà possibile mantenere l'equilibrio mediante infiniti sistemi diversi di forze al contorno. È degno di nota come questa classificazione, che si può fare delle varie superficie in relazione colla proprietà di essere tenute in equilibrio da uno solo o da infiniti sistemi di forze al contorno corrispondentemente ad ogni determinato sistema di forze applicate nei punti interni, sussista ancora rispetto ad un altro punto di vista. Proponiamoci difatti di vedere a quali condizioni una rete stia in equilibrio senza essere soggetta a forze applicate, ma solo per effetto delle tensioni interne (astrazione fatta, s'intende, per le forze da applicarsi al contorno). Osservando la $\Phi = 0$ nei diversi casi in cui l'abbiamo ottenuta, si trova che essa è sempre soddisfatta se si pone $U = V = W = 0$; questo però non dice ancora che ogni rete possa stare in equilibrio sotto l'azione di forze nulle, poichè bisognerà ogni volta vedere se le equazioni (2) coesistano per valori di λ e μ non entrambi nulli. Ora succede appunto che per $U = V = W = 0$ si ha $\lambda = \mu = 0$ proprio in quei casi, ricordati poco sopra, in cui le (2) determinano in modo unico λ e μ. La verifica è ovvia, e non starò qui ad eseguirla. Si potrà dunque dire che affinchè una rete, sulla quale i fili non sono linee assintotiche, stia in equilibrio sotto l'azione delle sole tensioni superficiali, è necessario e sufficiente che sia verificata la relazione $\omega = 0$; se, invece, dei due sistemi di fili l'uno è formato di assintotiche, bisognerà o che anche gli altri fili siano assintotiche, oppure che i primi siano rettilinei. Fra le superficie definite dalla (XVIII), ossia dalla $\omega = 0$, si è già visto che vi sono quelle sulle quali i fili formano un sistema coniugato, che rimane coniugato in una deformazione infinitesima per flessione; in particolare quelle le cui linee di curvatura hanno per imagine sferica un sistema isotermo, come sarebbero le superficie modanate a sviluppabile direttrice cilindrica e le superficie di rotazione.

Se un sistema di forze mantiene in equilibrio una rete, conti-

nuerà a mantenerla in equilibrio, a fortiori, se essa perde la sua estendibilità; perciò ogni caso di equilibrio per una rete si traduce senz'altro in un corrispondente caso di equilibrio per una superficie flessibile ed inestendibile; anzi su questa si verrà a conoscere un sistema coniugato rispetto alle tensioni, che sarà il sistema dei fili della rete primitiva. Riferendoci allora ai casi precedenti, in cui una rete può stare in equilibrio per solo effetto delle tensioni interne, si potrà pure concepire una vasta classe di superficie inestendibili, che godono della medesima proprietà. Si troverà in tal modo che appartengono a questa classe delle superficie per le quali la cosa è già nota: ad es. le superficie a curvatura positiva (poichè su di esse il sistema coniugato che si mantiene coniugato in una flessione infinitesima è sempre reale), e si sa difatti che le superficie a curvatura positiva stanno in equilibrio sotto l'azione di forze qualunque. Sono pure da annoverarsi, fra le altre, le superficie rigate; in particolare per le sviluppabili la proprietà fu già notata dal Beltrami (§ 9 della Memoria citata).

Terminerò con un teorema che non è inutile enunciare esplicitamente. Per quel che fu detto sappiamo che se una superficie flessibile ed inestendibile, riferita ad un sistema coniugato, verifica la (21), è capace di stare in equilibrio per solo effetto delle tensioni interne, e quel sistema coniugato è pure coniugato rispetto alle tensioni. Viceversa se una superficie flessibile ed inestendibile sta in equilibrio sotto l'azione di forze nulle per modo che un sistema doppio sia ad un tempo coniugato geometricamente e rispetto alle tensioni, la relazione (21) è verificata. Ora, avuto riguardo al significato della (21), questi due teoremi si possono così compendiare in un solo: « Condizione necessaria e sufficiente affinchè una superficie flessibile ed inestendibile ammetta una deformazione infinitesima nella quale un sistema doppio attualmente coniugato si conservi coniugato, è che nella configurazione attuale possa stare in equilibrio sotto l'azione delle sole tensioni superficiali, in modo che quel sistema sia coniugato rispetto alle tensioni ».

E. Daniele.

SUGLI AGGREGATI PERFETTI.

Nota di G. Vivanti, in Messina.

Adunanza del 13 novembre 1898.

1. Nella Memoria di G. Cantor: *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeiten* si trova il teorema seguente (Math. Ann. t. XXIII p. 471):

Un aggregato chiuso P può sempre decomporsi in un aggregato numerabile R ed in uno perfetto S; e tale decomposizione è unica.

Sebbene il processo seguito dall'autore conduca effettivamente ad una decomposizione unica e determinata (giacchè l'aggregato S non è altro che $P^{(\Omega)}$), ciò però non sembra sufficiente a porre fuor di dubbio l'impossibilità di più decomposizioni diverse. Tale impossibilità risulta come conseguenza delle considerazioni che stiamo per esporre.

2. *Se un aggregato perfetto si decompone in due aggregati parziali, l'uno dei quali sia chiuso, l'altro è condensato in sè ed ha potenza superiore alla prima.*

Sia S un aggregato perfetto di punti posti in uno spazio piano ad n dimensioni, ed abbiasi:

$$S \equiv U + V,$$

dove U è chiuso e $D(U, V) \equiv 0$. Un punto qualunque v di V essendo punto limite di S e non potendo esserlo di U, lo sarà necessariamente di V; sicchè V è condensato in sè. Inoltre, detto δ il limite inferiore delle distanze di v dai punti di U, δ è diverso da zero.

Supponiamo, se è possibile, che V sia numerabile; lo sarà pure l'aggregato di numeri positivi costituito dalle distanze di v dagli altri punti di V. Potrà quindi, per un teorema noto, trovarsi in infiniti modi un numero positivo ρ minore di δ e differente da tutte queste distanze. Dopo ciò, se col centro in v e con raggio ρ si descrive una superficie sferica ad $n-1$ dimensioni γ, sopra di essa non giacerà alcun punto di U o di V, e nel suo interno non vi sarà alcun punto di U. La sfera γ divide l'aggregato V in due parti, l'una W interna, l'altra X esterna ad essa. L'aggregato W è condensato in sè. Infatti, se w è un suo punto qualunque, esso è punto limite di V; ma, indicando con λ la sua minima distanza dalla superficie γ, tutti i punti di X distano da esso più di λ, sicchè esso è necessariamente punto limite di W. Inoltre W, come parte di V, è numerabile, e però non può essere perfetto; quindi, essendo condensato in sè, non è chiuso. Esiste cioè certamente almeno un punto limite z di W non appartenente a W; e questo punto giace di necessità entro γ o sopra γ. D'altra parte z, come punto limite di W e quindi di S, deve appartenere ad S, e però o ad X o ad U, mentre questi due aggregati sono completamente esterni a γ; sicchè l'ipotesi fatta, che V sia numerabile, conduce ad un assurdo.

3. *L'aggregato costituito dai punti comuni a due aggregati perfetti è chiuso.*

Sia $Z \equiv D(S, S_1)$, essendo S, S_1 due aggregati perfetti. Se z è un punto limite di Z, esso, come punto limite di S e di S_1, deve appartenere ad ambidue questi aggregati, e per conseguenza a Z. Dunque Z è chiuso.

4. Ciò premesso, supponiamo che un aggregato P sia decomponibile in due modi diversi in un aggregato perfetto ed in uno nu-

merabile; sia cioè:

$$P \equiv R + S \equiv R_1 + S_1 ,$$

dove R, R_1 sono numerabili, S, S_1 perfetti.

Poichè S ha potenza superiore alla prima, esso non può essere contenuto in R_1; e però si ha:

$$S \equiv D(S, R_1) + D(S, S_1),$$

dove $D(S, S_1) \neq 0$. Ora $D(S, S_1)$ è (n° 3) chiuso, e $D(S, R_1)$, come parte di R_1, è numerabile; quindi la relazione scritta non può sussistere (n° 2), a meno che non sia $D(S, R_1) \equiv 0$. Si ha in tal caso:

$$S \equiv D(S, S_1),$$

e per la stessa ragione:

$$S_1 \equiv D(S, S_1),$$

donde segue $S \equiv S_1$, e quindi $R \equiv R_1$.

Dunque la decomposizione è unica.

Messina, 24 ottobre 1898.

G. VIVANTI.

NUOVA DIMOSTRAZIONE DI TALUNI TEOREMI RELATIVI ALLE FUNZIONI SFERICHE CONTENUTI IN UNA NOTA DEL PROF. PACI (*).

Da una lettera del prof. Pizzetti al prof. Paci.

Adunanza del 13 novembre 1898.

. . . .

Mi permetto di darle qui un'altra dimostrazione delle sue ultime formole a pag. 138 (**).

La nota formola

$$\int_{-1}^{1} x^s X_m \, dx = 0 \qquad (s < m)$$

(*) « *Esposizione di due nuovi metodi per determinare l'espressione della densità in ogni punto di uno strato ellissoidico equipotenziale* » (Rend. Acc. Lincei, serie V, vol. VII, 2° sem. 1898, pp. 131-138).

(**)

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \cos^{2\nu-2}\theta \, P_{2n}(\cos\omega) \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi = 0 \\
&\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^{2\nu-2}\theta \cos^{2\nu-2}\varphi \, P_{2n}(\cos\omega) \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi = 0, \\
&\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \operatorname{sen}^{2\nu-2}\theta \operatorname{sen}^{2\nu-2}\varphi \, P_{2n}(\cos\omega) \operatorname{sen}\theta \, d\theta \, d\varphi = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad \nu < n$$

può scriversi

$$(1) \qquad \int_0^\pi \cos^s \omega \, P_m(\cos \omega) \operatorname{sen} \omega . d\omega = 0.$$

Di qui si deducono le altre

$$(2) \qquad \int_0^\pi \operatorname{sen}^{2r} \omega . P_{2n}(\cos \omega) \operatorname{sen} \omega . d\omega = 0 \qquad (r < n)$$

$$(3) \qquad \int_0^\pi \operatorname{sen}^{2s} \omega . \operatorname{sen}^{2r} \omega . P_{2n}(\cos \omega) \operatorname{sen} \omega . d\omega = 0. \qquad (r + s < n)$$

Per verificare queste due basta sostituire a $\operatorname{sen}^{2s} \omega$ la sua espressione per $\cos\omega$ e poi tener conto della (1).

Finalmente si ha anche, per s dispari,

$$(4) \qquad \int_0^\pi \cos^s \omega . P_{2n}(\cos \omega) . \operatorname{sen}^h \omega . d\omega = 0$$

poichè l'integrale da o a $\frac{1}{2}\pi$ è eguale e di segno contrario all'integrale da $\frac{1}{2}\pi$ a π.

Queste cose premesse, per dimostrare le sue formole non c'è che da fare un cambiamento di variabili negli integrali. Invece di assumere per asse polare la intersezione dei piani θ e θ' si assuma la intersezione dei piani θ' e ω. Allora, chiamando γ l'angolo fra gli archi θ' ed ω, l'elemento d'area della superficie sferica verrà espresso da

$$d\sigma' = \operatorname{sen} \omega . d\omega . d\gamma.$$

Assumendo per comodità l'arco θ come origine degli angoli φ, dal triangolo $(\theta\,\theta'\,\omega)$ si ottiene

$$\cos\theta = \cos\theta' \cos\omega + \operatorname{sen}\theta' \operatorname{sen}\omega \cos\gamma$$

$$\operatorname{sen}\theta \cos\varphi = \operatorname{sen}\theta' \cos\omega - \cos\theta' \operatorname{sen}\omega \cos\gamma$$

$$\operatorname{sen}\theta \operatorname{sen}\varphi = \operatorname{sen}\omega \operatorname{sen}\gamma.$$

Sostituendo nei primi membri delle sue formole e sviluppando le potenze, si vede subito che gli integrali si esprimono come somma di tanti termini i quali (astrazion fatta dai fattori $\cos^h \theta'$, $\operatorname{sen}^k \theta'$ che possono portarsi fuori del segno integrale) sono di una delle forme

$$\int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \cos^{2r} \omega . \operatorname{sen}^{2s} \omega . P_{2m}(\cos \omega) . \operatorname{sen} \omega . \cos^{2t} \gamma . d\omega \, d\gamma \qquad (r+s) < n$$

$$\int_0^\pi \int_{-\pi}^\pi \cos^{2r+1} \omega . \operatorname{sen}^h \omega \, P_{2n}(\cos \omega) . \cos^k \gamma \, d\omega \, d\gamma,$$

i quali si decompongono subito nel prodotto di due integrali semplici, e sono nulli in virtù di una delle formole (1), (2), (3), (4).

Questa dimostrazione è più diretta, ma molto meno elegante della sua.

Genova, 29 ottobre 1898.

P. Pizzetti.

GENERALIZZAZIONE DI ALCUNI TEOREMI INTORNO ALLE FUNZIONI SFERICHE CONTENUTI IN UNA NOTA DEL PROF. PACI (*).

Da una lettera del prof. **Gegenbauer** al prof. **Paci**.

Adunanza dell'11 dicembre 1898.

. . . .

Per le funzioni $C_\lambda^\nu(\cos x)$ definite mediante l'equazione

$$(1-2\alpha\cos x+\alpha^2)^{-\nu}=\sum_{\lambda=0}^{\lambda=\infty} C_\lambda^\nu(\cos x)\alpha^\lambda$$

$$\left\{\begin{aligned}\left[\frac{1}{\nu}C_n^\nu(\cos x)\right]_{\nu=0}&=\frac{2}{n}\cos nx \quad \text{per} \quad n>0\\ &=1 \quad \text{per} \quad n=0\end{aligned}\right\}$$

sussistono, come io ho fatto vedere nei *Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Classe der K. Akademie der Wissenschaften in Wien* (**), le relazioni:

(*) « *Esposizione di due nuovi metodi per determinare l'espressione della densità in ogni punto di uno strato ellissoidico equipotenziale* » (Rend. Acc. Lincei, serie V, vol. VII, 2° sem. 1898, pp. 131-138).

(**) « *Ueber einige bestimmte Integrale* » (Band 70, S. 433-443).

$$\int_0^\pi C_\lambda^\nu(\cos x)\, C_\mu^\nu(\cos x) \operatorname{sen}^{2\nu} x\, dx$$

$$= \frac{2^{2\nu-1}\Pi(\mu+2\nu-1)}{(\mu+\nu)\Pi(\mu)} \left\{ \frac{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)}{\Pi(2\nu-1)} \right\}^2 \delta_{\lambda,\mu}$$

$$(\delta_{\lambda,\mu} = 0 \quad \text{se} \quad \lambda \neq \mu; \qquad \delta_{\lambda,\lambda} = 1)$$

$$C_n^\nu(\cos\varphi\cos\psi + \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi \cos\chi)$$

$$= \frac{\Pi(2\nu-2)}{[\Pi(\nu-1)]^2} \sum_{\rho=0}^{\rho=n} \frac{4^\rho \Pi(n-\rho)[\Pi(n+\rho-1)]^2(2\nu+2\rho-1)}{\Pi(2\nu+n+\rho-1)} \times$$

$$\times \operatorname{sen}^\rho\varphi \operatorname{sen}^\rho\psi\, C_{n-\rho}^{\nu+\rho}(\cos\varphi)\, C_{n-\rho}^{\nu+\rho}(\cos\psi)\, C_\rho^{\nu-\frac{1}{2}}(\cos\chi).$$

Dalla prima di esse consegue, che il coefficiente a_λ di $C_\lambda^\nu(\cos\varphi)$ nello sviluppo della funzione $f(\cos\varphi)$ per le funzioni $C_\mu^\nu(\cos\varphi)$ è uguale a

$$\frac{(\lambda+\nu)\Pi(\lambda)}{2^{2\nu-1}\Pi(\lambda+2\nu-1)} \left\{ \frac{\Pi(2\nu-1)}{\Pi\left(\frac{2\nu-1}{2}\right)} \right\}^2 \int_0^\pi f(\cos\varphi)\, C_\lambda^\nu(\cos\varphi) \operatorname{sen}^{2\nu}\varphi\, d\varphi.$$

Lo stesso è evidentemente nullo, se il grado di $f(x)$ è inferiore a λ.

Se ora si moltiplica la seconda delle relazioni addotte per

$$f(\cos\chi) \operatorname{sen}^{2\nu-1}\chi \operatorname{sen}^{2(\nu+\mu)}\varphi\, d\chi\, d\varphi$$

e si integra rispetto a χ e φ da o fino a π, si ottiene l'equazione

$$\int_0^\pi \int_0^\pi C_n^\nu(\cos\varphi\cos\psi + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\chi) f(\cos\chi) \operatorname{sen}^{2\nu-1}\chi \operatorname{sen}^{2(\nu+\mu)}\varphi\, d\chi\, d\varphi$$

$$= \frac{2^{2\nu-1}\Pi(2\nu-2)}{[\Pi(\nu-1)]^2} \sum_{\rho=0}^{\rho=n} \frac{4^\rho \Pi(n-\rho)\Pi(\rho+2\nu-2)[\Pi(\nu+\rho-1)]^2}{\Pi(\rho)\Pi(2\nu+n+\rho-1)} a_\rho \operatorname{sen}^\rho\psi\, C_{n-\rho}^{\nu+\rho}(\cos\psi) \times$$

$$\times \int_0^\pi \operatorname{sen}^{2\mu-\rho}\varphi\, C_{n-\rho}^{\nu+\rho}(\cos\varphi) \operatorname{sen}^{2(\nu+\rho)}\varphi\, d\varphi.$$

Se ora $f(x)$ è una funzione pari intera di grado 2τ, ed è

$$n > 2\mu \geqq 2\tau,$$

le quantità a_ρ sono differenti da zero solamente per $\rho = 0$, 1, ..., 2τ. Ma ora, poichè per questi valori di ρ si annulla gl'integrali sotto il segno sommatorio, così si ottiene l'equazione

$$\int\int C_n^\nu(\cos\varphi\cos\psi + \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi\cos\chi)f(\cos\chi)\operatorname{sen}^{2\nu-1}\chi\operatorname{sen}^{2(\nu+\mu)}\varphi\, d\chi\, d\varphi =$$

La stessa, a motivo della relazione

$$C_n^{\frac{1}{2}}(x) = P_n(x),$$

è una generalizzazione dei suoi notevoli teoremi.

Vienna, 16 novembre 1898.

L. GEGENBAUER.

UNA PROPRIETÀ DELLE SERIE CONTINUE DI CURVE APPARTENENTI AD UNA SUPERFICIE ALGEBRICA REGOLARE.

Nota di **Federigo Enriques**, in Bologna.

Adunanza del 25 dicembre 1898.

1. Esistono numerose classi di superficie sopra le quali si trova una serie continua di curve non contenuta (totalmente) in un sistema lineare; basta citare ad esempio le superficie con un fascio irrazionale di curve (in particolare le rigate), le superficie rappresentanti le coppie di punti d'una curva irrazionale, ecc.

Il sig. Humbert ha fatto vedere che tutte queste superficie posseggono integrali di differenziali totali di 1ª specie (*). Io mi propongo di mostrare che esse hanno altresì il genere numerico diverso dal geometrico, precisamente

$$p_n < p_g;$$

ciò è stato già stabilito per alcune delle superficie predette, in particolare per quelle che posseggono un fascio irrazionale di curve (**).

(*) « *Sur une propriété d'une classe de surfaces algébriques* » (Comptes Rendus, 1893).

(**) Cfr. Castelnuovo: « *Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica* » (Annali di Matematica, 1897).

Il teorema che viene qui dimostrato può essere enunciato sotto la forma più espressiva:

Sopra una superficie regolare ($p_n = p_g$) *ogni serie continua di curve è contenuta* (*totalmente*) *in un sistema lineare,* e quindi le curve di dato ordine che stanno sopra una tale superficie si distribuiscono in tanti sistemi lineari.

2. Si abbia sopra una superficie regolare F una serie continua (algebrica) di curve (algebriche) C che, senza introdurre restrizioni, riterremo irriducibili; possiamo supporre questa serie ∞^1, altrimenti basterebbe considerare le serie ∞^1 in essa contenute.

Denotiamo con π il genere virtuale delle curve C (che si ottiene sommando al genere effettivo di una C il numero dei suoi punti doppi variabili non singolari per F), e con n il numero delle intersezioni variabili di due C. Riterremo $n > 0$, escludendo così il caso in cui le C formino un fascio, caso già esaurito dalle ricerche del sig. Castelnuovo.

L'ente algebrico ∞^1 che ha per elementi le C può considerarsi come una curva L di un certo genere p.

Si consideri allora su L una serie lineare g^1_m ove $m \geq p + 1$, la quale può essere determinata partendo da un gruppo di m punti generici.

In corrispondenza alla g^1_m si ottiene sopra F una serie razionale ∞^1 di curve, composte ciascuna di m curve C. Per la sua razionalità questa serie risulta contenuta (totalmente) in un sistema lineare (K) (*), che sarà irriducibile, essendo irriducibili le C (**).

Partendo da un'altra g^1_m generica di L, costruiremo analogamente su F un'altra serie razionale di curve, composte ciascuna con m curve C, la quale serie sarà contenuta totalmente in un sistema lineare $[K_1]$, pure irriducibile.

3. Considereremo i sistemi lineari $[K]$ e $[K_1]$ come completi,

(*) Cfr. Enriques: « *Un'osservazione sulla rappresentazione parametrica delle curve algebriche* » (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1896).

(**) Cfr. Enriques: « *Introduzione alla Geometria sopra le superficie algebriche* » n° 5 (Memorie della Società Italiana delle Scienze detta dei XL, 1896).

ed osserveremo che essi avranno lo stesso genere π, e (ove non coincidano) potranno riguardarsi, ciascuno come limite dell'altro quando si faccia variare opportunamente la g^1_m scelta su L.

Teniamo ora conto della regolarità della superficie F. Questa proprietà ci permette di affermare che le curve K' seganti le K secondo gruppi canonici $G_{2\pi-2}$ (le quali curve, dette *subaggiunte* a $[K]$ formano un sistema lineare $[K']$), segheranno sopra una K la serie canonica completa (*).

Consideriamo ora la serie segata dalle K' sopra una curva K_1. Anzitutto è facile vedere che le intersezioni di K' e K_1, sono, come quelle di K' e K, in numero di $2\pi - 2$, perchè le K' debbono intersecare le C in $\frac{2\pi - 2}{n}$ punti.

La dimensione della serie segata da $[K']$ su K_1 potrà esser minore di $\pi - 1$?

Si dimostra che questo è impossibile, perchè altrimenti il sistema $[K' - K_1]$ residuo di una K_1 rispetto a $[K']$ avrebbe una dimensione superiore alla dimensione di $[K' - K]$ mentre il primo sistema ha per limite il secondo quando $[K_1]$ tende a $[K]$. È infatti una conseguenza del principio della conservazione del numero, che un sistema lineare variabile avente una certa dimensione r non possa aver per limite un sistema di dimensione inferiore ad r, giacchè per r punti generici della superficie passerà una curva del sistema variabile e quindi una curva (o infinite curve) del sistema limite.

Ciò posto le curve K' segano su una K_1 i gruppi della serie canonica $g^{\pi-1}_{2\pi-2}$, e perciò sono ugualmente subaggiunte a $[K_1]$ come a $[K]$.

Dunque le K' sono curve subaggiunte ad ogni sistema lineare contenente (totalmente) m curve C.

Se ora si considerano i sistemi lineari contenenti (totalmente) i gruppi di $2m$ curve C, avremo che tutti ammettono le stesse curve subaggiunte, componenti un sistema lineare (completo) $[(2K)']$.

Di qui si deduce che ogni gruppo di m curve C è contenuto

(*) « *Introduzione* », etc., l. c., III, VI.

(totalmente) nel sistema lineare

$$[K] = [(2K)' - K']$$

residuo di $[K']$ rispetto a $[(2K)']$ (*).

Ma allora anche tutte le curve C sono contenute (totalmente) nel sistema lineare

$$[K - (m-1)C]$$

residuo di $m - 1$ curve C rispetto a $[K] = (mC)$. C. D. D.

4. OSSERVAZIONE. — La dimostrazione del teorema che forma l'oggetto di questa Nota si basa sulla più elementare proprietà delle superficie regolari. La dimostrazione può essere semplificata se si ricorre al teorema del sig. Castelnuovo (l. c.) che afferma, per queste superficie, la completezza della serie caratteristica di un sistema lineare completo. Il sig. Castelnuovo stesso mi ha indicato tale semplificazione.

Essa consiste in ciò.

Si formino come al n° 2, i due sistemi $[K]$, $[K_1]$, e si designi con r la loro dimensione. Paragoniamo le serie segate sopra una curva generica K dai sistemi $[K]$ e $[K_1]$; la prima serie, completa, ha la dimensione $r - 1$; la seconda serie avrà la dimensione $\rho = r - 1$ o $\rho = r$ secondochè $[K_1]$ contiene K o no.

Ora la serie segata da $[K_1]$ su K contiene m gruppi generici della serie (non lineare) γ_ν segata su K dalle C, mentre la serie (∞^{r-1}) segata da $[K]$ è la serie completa determinata da m gruppi particolari di γ_ν. Si prova quindi facilmente che deve essere $\rho \leqq r - 1$ e perciò $\rho = r - 1$.

Da ciò si trae che $[K]$ e $[K_1]$ coincidono, onde ecc.

Bologna, dicembre 1898.

F. ENRIQUES.

(*) « *Introduzione* », etc., l. c., III.

DELLE CONGRUENZE BINOMIE RISPETTO AD UN MODULO PRIMO p O AD UNA POTENZA DI ESSO, NEL CASO IN CUI $\frac{p-1}{2}$ SIA UN NUMERO PRIMO, OVVERO IL DOPPIO D'UN NUMERO PRIMO.

Nota di **R. Alagna**, in Palermo.

Adunanze del 27 novembre ed 11 dicembre 1898.

Si sa che la risoluzione delle congruenze binomie, rispetto ad un modulo primo p, si collega con la ricerca delle radici primitive rispetto al medesimo modulo; ed è noto altresì che questa ricerca si fa per tentativi, sia che si segua il metodo di sopprimere mano mano dalla serie

$$(1) \qquad 1, 2, 3, \ldots, (p-1)$$

tutti i termini che sodisfano alle congruenze della forma

$$x^{\frac{p-1}{\theta}} \equiv 1 \pmod{p},$$

dove θ è un divisore primo di $p-1$, sia che si segua il metodo dovuto a Gauss.

Però, se $\frac{p-1}{2}$ è un numero primo, ovvero il doppio d'un numero primo, si possono determinare direttamente i diversi esponenti

ai quali appartengono i numeri della serie (1), ciò che dà modo di risolvere immediatamente le congruenze binomie rispetto a tale modulo o ad una potenza di esso.

Noi considereremo prima il caso in cui il modulo p sia della forma $4k+1$, e poi quello in cui si presenta della forma $4k+3$.

I.

$p = 4k + 1$

§ 1.

Esponenti ai quali appartengono i numeri

$$1, 2, 3, \ldots, (p-1).$$

1. Sia p della forma $4k+1$ e quindi $\frac{p-1}{2} = 2k$. Supponiamo k anch'esso numero primo, il quale sarà necessariamente dispari, perchè per $k=2$, sarebbe $p=9$, che non è primo.

Tutti i divisori di $p-1$ in questo caso sono:

$$1, 2, 4, \quad k, \quad 2k, \quad 4k.$$

Ora è noto che se p è un numero primo ed n indica un divisore qualunque di $p-1$, vi saranno $\varphi(n)$ numeri, minori di p, appartenenti all'esponente n, ove il simbolo $\varphi(n)$ esprime il numero dei numeri primi con n e non superiori ad n. Quindi della serie (1) un termine apparterrà all'esponente 1, uno all'esponente 2, due termini apparterranno all'esponente 4, $k-1$ all'esponente k, $k-1$ all'esponente $2k$, $2(k-1)$ all'esponente $4k$ e quest'ultimi saranno le radici primitive rispetto a p.

2. *Esponenti* 1 *e* 2. — Il termine appartenente all'esponente 1 evidentemente è 1; quello appartenente all'esponente 2 è -1.

3. *Esponente* k. — Essendo, per ipotesi, k un numero primo, il

più piccolo valore di k è 1 e quello di p è 5; cosicchè, qualunque sia k, sarà 2 primo con p e però, per il teorema di Fermat, sarà

$$2^{4k} \equiv 1 \pmod{p},$$

ovvero

$$16^k \equiv 1 \pmod{p}.$$

Poichè k è un numero primo, 16 o appartiene all'esponente 1, ovvero all'esponente k.

Ora è facile dimostrare che 16 appartiene all'esponente 1, solo quando è $k = 1$.

Infatti, essere $16 \equiv 1 \pmod{p}$, importa che 15 è divisibile per p; ma 15 è divisibile pei soli numeri primi 3 e 5, ed è p diverso da 3, dunque sarà $p = 5$, cioè $k = 1$.

Pertanto 16 appartiene, in qualunque caso, all'esponente k, e i $k - 1$ termini della serie (1) appartenenti all'esponente k sono

$$16, 16^2, 16^3, \ldots, 16^{k-1}$$

o i loro residui minimi.

4. *Esponente* $2k$. — Poichè -1 appartiene all'esponente 2 e 16 all'esponente k, ed è 2 primo con k, -16 apparterrà all'esponente $2k$.

Si può però dimostrare che 4 appartiene all'esponente $2k$.

Infatti, appartenendo 16 all'esponente k, 4 non può appartenere ad un esponente minore di k. Ma nemmeno esso appartiene all'esponente k, perchè se fosse

$$4^k \equiv 1 \pmod{p},$$

cioè

$$2^{2k} \equiv 1 \pmod{p},$$

2 sarebbe un residuo quadratico.

Ora il numero k si è supposto primo e diverso da 2, quindi esso può avere una delle forme seguenti:

$$k = 4i + 1,$$

$$k = 4i + 3.$$

Nel primo caso sarebbe

$$p = 16i + 5,$$

ovvero, ponendo $m = 2i$,

$$p = 8m + 5;$$

nel secondo caso sarebbe

$$k = 16i + 13,$$

cioè, ponendo $m = 2i + 1$,

$$p = 8m + 5.$$

In tutti e due i casi p si presenterebbe della forma $8m + 5$ e però, per un noto teorema, 2 non può essere residuo quadratico.

Essendo intanto

$$4^{2k} \equiv 1 \pmod{p},$$

e non potendo 4 appartenere nè all'esponente k, nè ad un esponente minore di k, è evidente che 4 apparterrà all'esponente $2k$.

Indicando dunque con $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{k-1}$ i $k - 1$ numeri primi con $2k$ e non superiori a $2k$, i numeri della serie (1) appartenenti all'esponente $2k$ sono

$$4^{\alpha_1}, 4^{\alpha_2}, 4^{\alpha_3}, \ldots, 4^{\alpha_{k-1}}$$

ovvero i loro residui minimi.

5. *Esponente* $4k$. — Si è visto, nel numero precedente, che 2 non appartiene all'esponente $2k$ e quindi non può appartenere nè all'esponente 2, nè all'esponente k.

Inoltre 2 appartiene all'esponente 4 solo quando $k = 1$, perchè si è detto che la congruenza

$$2^4 \equiv 1 \pmod{p}$$

è soltanto possibile per $k = 1$.

Il numero 2 appartiene dunque all'esponente $4k$ ed è pertanto la più piccola radice primitiva rispetto a p.

6. *Esponente* 4. — La congruenza

$$2^{4k} \equiv 1 \pmod{p}$$

può scriversi

$$(2^k)^4 \equiv 1 \pmod{p},$$

di modo che, se 2^k non appartenesse all'esponente 4, dovrebbe appartenere o all'esponente 1 o all'esponente 2.

Ora in nessun caso si ha

$$2^k \equiv 1 \pmod{p},$$

perchè si è visto che 2 appartiene all'esponente $4k$ e nemmeno si ha

$$2^k \equiv -1 \pmod{p},$$

perchè, se così fosse, sarebbe

$$2^{2k} \equiv 1 \pmod{p},$$

ciò che è egualmente impossibile.

Il numero 2^k, ovvero il suo residuo minimo, appartiene dunque all'esponente 4, e l'altro numero appartenente all'esponente 4 è 2^{3k} cioè -2^k.

Possiamo pertanto stabilire il seguente

TEOREMA.—*Se un numero primo* p *è della forma* $4k+1$, *ove* k *un numero primo, la più piccola delle radici primitive, rispetto al* ›*dulo* p, *è* 2; 4 *appartiene all'esponente* $2k$, 16 *all'esponente* k, 2^k *l'esponente* 4.

7. È notevole che il numero k appartiene all'esponente k. Infatti sappiamo che

$$(2^k)^2+1\equiv 0 \pmod p$$

›è

$$4^k\equiv 4k \pmod p.$$

Dividendo i due membri per 4, ch'è primo con p, si ha:

$$4^{k-1}\equiv k \pmod p.$$

Essendo k un numero primo dispari, $k-1$ è pari ed è quindi lla forma $k-1=2n$; cosicchè si ha

$$4^{2n}\equiv k \pmod p$$

›è

$$16^n\equiv k \pmod p.$$

Ma 16^n appartiene all'esponente k, dunque

$$k^k\equiv 1 \pmod p,$$

quale relazione ha luogo anche per $k=1$.

§ 2.

Delle congruenze

$x^2-1\equiv 0$, $x^4-1\equiv 0$, $x^k-1\equiv 0$, $x^{2k}-1\equiv 0$, $x^{4k}-1\equiv 0 \pmod p$.

8. Da quanto precede si deduce:

1° La congruenza

$$x^2-1\equiv 0 \pmod p$$

ha per radici $x \equiv \pm 1$, delle quali la prima appartiene alla congruenza $x - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ e l'altra a $x + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

2° La congruenza

$$x^4 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

ha per radici $x \equiv \pm 1$ e $x \equiv \pm 2^k$, le due ultime delle quali sono le radici di

$$x^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

3° La congruenza

$$x^k - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

ha le k radici espresse da 16^μ [$\mu = 0, 1, 2, \ldots, (k-1)$].

Di esse quella corrispondente a $\mu = 0$, appartiene a

$$x - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

le altre $k - 1$ sono le radici della congruenza

$$x^{k-1} + x^{k-2} + x^{k-3} + \ldots + x + 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

4° La congruenza

$$x^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

potendosi scrivere

$$(x^k - 1)(x^k + 1) \equiv 0 \pmod{p},$$

ha le $2k$ radici

$$1, 16, 16^2, \ldots, 16^\mu, -1, 4^{\alpha_1}, 4^{\alpha_2}, 4^{\alpha_3}, \ldots, 4^{\alpha_{k-1}};$$

delle quali le prime k sono quelle di $x^k - 1 \equiv 0 \pmod{p}$, e le altre k della congruenza $x^k + 1 \equiv 0 \pmod{p}$.

I numeri $4^{\alpha_1}, 4^{\alpha_2}, 4^{\alpha_3}, \ldots, 4^{\alpha_{k-1}}$ sono evidentemente le radici

$[illegible]\ \frac{x^{p} - 1}{x - 1} \equiv 0 \pmod p$, [illegible] congruenza

$$x^{[illegible]} - x^{[illegible]} - x^{[illegible]} - \dots - x - 1 \equiv 0 \pmod p.$$

[illegible] sono le potenze di grado pari [illegible] la radice -1 è congrua [illegible] sono le potenze di grado dispari [illegible] cosicchè le $2k$ radici della congruenza [illegible] si possono esprimere con a^{ν}, ove $\nu = 0$, [illegible] $2r - 1$.

[illegible] La congruenza

$$x^{[illegible]} - 1 \equiv 0 \pmod p$$

ha [illegible] per radici [illegible] $p - 1$ numeri [illegible] $\dots (p - 1)$; e poichè

$$x^{[illegible]} - 1 = (x^{[illegible]} - 1)(x^{[illegible]} - 1),$$

così [illegible] di queste radici appartengono alla congruenza

$$x^{[illegible]} - 1 \equiv 0 \pmod p,$$

[illegible] congruenza

$$x^{[illegible]} - 1 \equiv 0 \pmod p.$$

Siccome poi

$$x^{[illegible]} - 1 = (x^{2} - 1)(x^{[illegible]} - x^{[illegible]} - x^{[illegible]} - \dots - x^{2} + 1),$$

così le radici di

$$x^{[illegible]} - 1 \equiv 0 \pmod p$$

sono $\equiv \pm 1$ e le [illegible] $(k - 1)$ radici primitive rispetto a p, le quali si

possono esprimere con 2^β, ove β rappresenta uno qualunque dei numeri primi a $4k$ e non superiori a $4k$.

9. Sia ora la congruenza

$$x^t - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

ove t è un numero intero positivo qualunque.

Se t è primo con $4k$, la sola radice della congruenza proposta è 1; ma se t non è primo con $4k$ e θ esprime il loro massimo comun divisore, sappiamo che le radici della congruenza data sono quelle di

$$x^\theta - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

E poichè tutti i divisori di $4k$, diversi dall'unità, sono 2, 4, k, $2k$, $4k$, così θ sarà eguale ad uno di essi; cosicchè le radici di $x^t - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ sono quelle di una delle congruenze precedentemente risolute.

§ 3.

Delle congruenze
$x^2-N\equiv 0$, $x^4-N\equiv 0$, $x^k-N\equiv 0$, $x^{2k}-N\equiv 0$, $x^{4k}-N\equiv 0 \pmod{p}$.

10. Siamo ora al caso di risolvere una qualunque delle precedenti congruenze, ove N è primo con p.

1° Sia la congruenza

$$x^2 - N \equiv 0 \pmod{p}.$$

Perchè essa sia possibile, bisogna che sia

$$N^{2k} \equiv 1 \pmod{p},$$

cioè che sia (8, 4°)

$$N \equiv 4^\nu \pmod{p},$$

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

[illegible]

Quanto alla seconda, siccome (8, 2°)

$$(2^k)^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

si ha, moltiplicando per $4^\mu = (2^\mu)^2$,

$$(2^{k+\mu})^2 + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

la quale relazione mostra che le due radici della congruenza

$$x^2 + 4^\mu \equiv 0 \pmod{p}$$

sono

$$x \equiv \pm 2^{k+\mu}.$$

Pertanto le quattro radici della congruenza data sono:

$$x \equiv \pm 2^\mu; \qquad x \equiv \pm 2^{k+\mu} \pmod{p},$$

ove μ è quello dei numeri $0, 1, 2, \ldots, (k-1)$ che sodisfa alla relazione

$$N \equiv 16^\mu \pmod{p}.$$

3° Consideriamo la congruenza

$$x^k - N \equiv 0 \pmod{p}.$$

Perchè essa sia possibile, bisogna che si abbia

$$N^4 \equiv 1 \pmod{p},$$

cioè che sia (8, 2°)

$$N \equiv \pm 1 \quad \text{ovvero} \quad N \equiv \pm 2^k \pmod{p}.$$

a) Se $N \equiv \pm 1 \pmod{p}$, la congruenza data prende la forma

$$x^k \pm 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

e le sue radici sono note (8, 4°).

b) [illegible] $N \equiv 2^s$ [illegible]

$$x^p - 2^s \equiv [illegible] \pmod{p},$$

[illegible]

$$[illegible] - [illegible] \equiv [illegible] \pmod{p},$$

quindi

$$[illegible] - 2^s \equiv [illegible] \pmod{p},$$

[illegible]

$$x^p - 2^s \equiv [illegible] \pmod{p},$$

[illegible]

$$x \equiv 2^{[illegible]} \pmod{p}, \qquad (\alpha = 0, 1, 2, \ldots, k-1)$$

c) [illegible] $N \equiv -2^s$, [illegible]

$$x^p + 2^s \equiv 0 \pmod{p}.$$

[illegible] dispari da 1 a $2k-1$, [illegible]

$$(4^{\alpha})^p - 1 \equiv 0 \pmod{p};$$

moltiplicando per 2^s, si ha

$$(2^{2\alpha+s})^p + 2^s \equiv 0 \pmod{p},$$

la quale mostra che le radici della congruenza

$$x^p + 2^s \equiv 0 \pmod{p}$$

sono espresse da

$$x \equiv 2^{2\alpha+1} \pmod{p},$$

ove α può assumere k valori.

La radice $x \equiv -2$, che sodisfa evidentemente alla congruenza data, corrisponde al valore di $\alpha = k$.

4° Sia la congruenza

$$x^{2k} - N \equiv 0 \pmod{p}.$$

La condizione di possibilità è espressa da

$$N^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

cioè da

$$N \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

Le sole congruenze possibili sono dunque

$$x^{2k} \mp 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

le cui radici sono state trovate (8, 4° e 5°).

5° Sia infine la congruenza

$$x^{4k} - N \equiv 0 \pmod{p};$$

si ha, come condizione,

$$N \equiv 1 \pmod{p},$$

cosicchè la congruenza si riduce a

$$x^{4k} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

e le sue radici sono $1, 2, 3, \ldots, 4k$.

11. È noto che la risoluzione della congruenza binomia

$$x^t \equiv A \pmod{p}$$

ove A è primo con p, si riduce, ricorrendo agli indici, a quella d'una congruenza di primo grado.

Nel nostro caso, si può prendere, come base degli indici, il numero 2, perchè sappiamo che 2 è una radice primitiva; cosicchè basta determinare il minimo esponente n tale che sia

$$2^n \equiv A \pmod{p},$$

e quindi risolvere, rispetto ad ind x, la congruenza

$$t \operatorname{ind} x \equiv n \pmod{4k}.$$

§ 4.

Delle congruenze

$x^2-N\equiv 0,\ x^4-N\equiv 0,\ x^k-N\equiv 0,\ x^{2k}-N\equiv 0,\ x^{4k}-N\equiv 0 \pmod{p^\lambda}$.

12. Sono noti i metodi per la risoluzione della congruenza

$$x^2 - N \equiv 0 \pmod{p^\lambda},$$

quando si è risoluta l'altra

$$x^2 - N \equiv 0 \pmod{p}.$$

Il sig. Amici (vedi *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, t. XI, pag. 43) ha mostrato come si possa determinare una radice della congruenza

$$x^m \equiv b \pmod{p^\lambda},$$

quando si suppone determinata una radice della

$$x^m \equiv b \pmod{p},$$

purchè m non sia multiplo di p.

Note pertanto le radici delle congruenze considerate al § 3, si potrebbero trovare quelle delle congruenze che ci proponiamo di con-

siderare in questo paragrafo. Pure, nel caso del quale ci occupiamo, le radici delle congruenze proposte si possono trovare direttamente, con metodo abbastanza semplice.

1° Si voglia risolvere la congruenza

$$x^2 - N \equiv 0 \pmod{p^\lambda}.$$

Considerando la congruenza

$$x^2 - N \equiv 0 \pmod{p},$$

si è trovato (10, 1°) che

$$x \equiv \pm 2^\nu \pmod{p};$$

cosicchè

$$N \equiv (2^\nu)^2 \pmod{p}.$$

Moltiplicando per $(2^\nu)^2$, si ha:

$$(2^\nu)^2 N \equiv (2^\nu)^4 \pmod{p};$$

ed elevando alla potenza di grado $kp^{\lambda-1}$,

$$(2^{\nu k p^{\lambda-1}})^2 N^{kp^{\lambda-1}} \equiv 1 \pmod{p^\lambda}.$$

Moltiplicando i due membri per N,

$$(2^{\nu k p^{\lambda-1}})^2 N^{kp^{\lambda-1}+1} \equiv N \pmod{p^\lambda}.$$

Siccome k e p sono numeri dispari, $kp^{\lambda-1}+1$ è pari, quindi la precedente relazione si può scrivere:

$$(2^{\nu k p^{\lambda-1}} . N^{\frac{kp^{\lambda-1}+1}{2}})^2 - N \equiv 0 \pmod{p^\lambda},$$

dalla quale si ricava

$$x \equiv \pm 2^{\nu k p^{\lambda-1}} . N^{\frac{kp^{\lambda-1}+1}{2}} \pmod{p^\lambda}.$$

Se ν è pari, siccome $4^{kp^{\lambda-1}} \equiv -1 \pmod{p^\lambda}$, la precedente relazione assume la forma più semplice

$$x \equiv \pm N^{\frac{kp^{\lambda-1}+1}{2}} \pmod{p^\lambda}.$$

2° Proponiamoci ora di risolvere la congruenza

$$x^4 - N \equiv 0 \pmod{p^\lambda}.$$

Le radici della congruenza

$$(2) \qquad x^4 - N \equiv 0 \pmod{p}$$

sono (10, 2°)

$$x \equiv \pm 2^{\mu}; \qquad x \equiv \pm 2^{k+\mu}.$$

Scegliendo per x i due primi valori, si ha:

$$N \equiv 2^{4\mu} \pmod{p},$$

dalla quale si ricava

$$(3) \qquad N^{kp^{\lambda-1}} \equiv 1 \pmod{p^\lambda},$$

e quindi

$$N^{kp^{\lambda-1}+1} \equiv N \pmod{p^\lambda}.$$

Ora, essendo p della forma $4k+1$, sarà $p^{\lambda-1}$ della medesima forma; quanto a k, essa può presentarsi sotto una delle due forme

$$k = 4i + 3 \quad \text{ovvero} \quad k = 4i + 1.$$

Nel primo caso $kp^{\lambda-1} + 1$ sarà divisibile per 4, e però la precedente congruenza si potrà scrivere

$$\left(N^{\frac{kp^{\lambda-1}+1}{4}}\right)^4 - N \equiv 0 \pmod{p^\lambda},$$

la quale mostra che due radici della congruenza proposta sono

$$x \equiv \pm N^{\frac{kp^{\lambda-1}+1}{4}}.$$

Nel secondo caso, elevando alla 3^a potenza i due membri della (3), si ha:

$$N^{3kp^{\lambda-1}} \equiv 1 \pmod{p^\lambda},$$

e però

$$N^{3kp^{\lambda-1}+1} \equiv N \pmod{p^\lambda}.$$

Essendo k della forma $4i+1$, sarà $3kp^{\lambda-1}+1$ divisibile per 4, quindi la precedente congruenza si potrà scrivere

$$\left(N^{\frac{3kp^{\lambda-1}+1}{4}}\right)^4 - N \equiv 0 \pmod{p^\lambda},$$

e le due radici saranno espresse da

$$x \equiv \pm N^{\frac{3kp^{\lambda-1}+1}{4}}.$$

Se si volessero esprimere le due radici mediante una formula che fosse applicabile qualunque sia la forma di k, basterebbe elevare i due membri della (3) alla potenza $3k$ e poi moltiplicare per N; si otterrebbe così

$$N^{3k^2p^{\lambda-1}+1} - N \equiv 0 \pmod{p^\lambda},$$

e siccome $3k^2p^{\lambda-1}+1$ è, in qualunque caso, multiplo di 4, si ha

$$x \equiv \pm N^{\frac{3k^2p^{\lambda-1}+1}{4}}. \tag{4}$$

Scegliendo ora per radici della (2) $x \equiv \pm 2^{k+\mu}$, sarebbe

$$N \equiv 2^{4(k+\mu)} \equiv 2^{4\mu} \pmod{p},$$

e quindi non si otterrebbero due radici diverse da quelle precedentemente trovate.

Per trovare intanto le altre due radici della congruenza proposta, seguiremo la seguente via.

Essendo

$$N \equiv 16^{\mu} \pmod{p},$$

sarà

$$N^{k} \equiv 1 \pmod{p}.$$

D'altra parte

$$2^{4k} \equiv 1 \pmod{p},$$

quindi moltiplicando, membro a membro, le due ultime congruenze, si ha

$$2^{4k} . N^{k} \equiv 1 \pmod{p}.$$

Elevando a potenza di grado $3\,k p^{\lambda-1}$ e moltiplicando il risultato per N, si ottiene

$$2^{3 \cdot 4 k^2 p^{\lambda-1}} . N^{3k^2 p^{\lambda-1}+1} - N \equiv 0 \pmod{p^{\lambda}}.$$

Siccome $3\,k^2 p^{\lambda-1} + 1$, qualunque sia la forma di k, è multipla di 4, la precedente relazione si può scrivere:

$$\left(2^{3k^2 p^{\lambda-1}} . N^{\frac{3k^2 p^{\lambda-1}+1}{4}}\right)^4 - N \equiv 0 \pmod{p^{\lambda}},$$

e però le altre due radici della congruenza data sono espresse da

$$x \equiv \pm\, 2^{3k^2 p^{\lambda-1}} . N^{\frac{3k^2 p^{\lambda-1}+1}{4}}.$$

Queste due radici non possono in alcun caso essere equivalenti alle (4), perchè ciò equivarrebbe a supporre vera la congruenza

$$2^{3k^2 p^{\lambda-1}} \equiv 1 \pmod{p^{\lambda}}$$

e quindi anche

$$2^{3k^2 p^{\lambda-1}} \equiv 1 \pmod{p},$$

ciò che non è, perchè essendo 2 una radice primitiva rispetto al modulo p, $3\,k^2 p^{\lambda-1}$ dovrebbe essere multiplo di 4; e questo è impossibile, perocchè k e p sono numeri primi dispari.

Le quattro radici della congruenza

$$x^4 - N \equiv 0 \pmod{p^\lambda}$$

ove è $N \equiv 16^\mu \pmod{p}$, sono dunque

$$x \equiv \pm N^{\frac{3k^2p^{\lambda-1}+1}{4}}; \qquad x \equiv \pm 2^{3k^2p^{\lambda-1}} . N^{\frac{3k^2p^{\lambda-1}+1}{4}};$$

ed è chiaro che, note le prime due, basta per trovare le altre, moltiplicare quelle per il fattore $2^{3k^2p^{\lambda-1}}$.

3° Sia ora data la congruenza

$$x^k - N \equiv 0 \pmod{p^\lambda}.$$

Si è visto (10, 3°) che la congruenza

$$x^k - N \equiv 0 \pmod{p}$$

è possibile per $N \equiv \pm 1$ ovvero per $N \equiv \pm 2^k$; cosicchè bisogna considerare separatamente questi differenti casi.

a) Sia primieramente la congruenza

$$x^k - 1 \equiv 0 \pmod{p^\lambda}.$$

Siccome le radici di

$$x^k - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

sono espresse (8, 3°) da $x \equiv 16^\mu$, si ha

$$16^{\mu k} \equiv 1 \pmod{p};$$

e però

$$(16^{\mu p^{\lambda-1}})^k \equiv 1 \pmod{p^\lambda}.$$

Le k radici della congruenza data sono dunque espresse da

$$x \equiv 16^{\mu p^{\lambda-1}}. \qquad [\mu = 0, 1, 2, \ldots, (k-1)].$$

b) Sia ora

$$x^k + 1 \equiv 0 \pmod{p^\lambda}.$$

Sappiamo (10, 3°, c) che le radici della congruenza

$$x^k + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

sono espresse da 4^α, ove α indica uno qualunque dei k numeri dispari della serie $1, 3, 5, \ldots, (2k-1)$; si ha quindi

$$4^{\alpha k} + 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

e però

$$(4^{\alpha p^{\lambda-1}})^k + 1 \equiv 0 \pmod{p^\lambda};$$

cosicchè le k radici cercate sono espresse da

$$x \equiv 4^{\alpha p^{\lambda-1}}.$$

c) Si consideri la congruenza

$$x^k - 2^k \equiv 0 \pmod{p^\lambda}.$$

Si è trovato (10, 3°, b) che

$$2^{(4\mu+1)k} \equiv 2^k \pmod{p};$$

quindi sarà

$$2^{[(4\mu+1)k-k]p^{\lambda-1}} \equiv 1 \pmod{p^\lambda}.$$

Moltiplicando per 2^k,

$$2^{[(4\mu+1)k-k]p^{\lambda-1}+k} - 2^k \equiv 0 \pmod{p^\lambda}$$

sono espresse da $4^{\nu}(\nu = 0, 1, 2, \ldots 2k - 1)$; cosicchè si ha:

$$(4^{\nu})^{2k} \equiv 1 \pmod{p},$$

e quindi

$$(4^{\nu p^{\lambda-1}})^{2k} - 1 \equiv 0 \pmod{p^{\lambda}},$$

donde si ricava

$$x \equiv \pm 4^{\nu p^{\lambda-1}}. \tag{5}$$

Il doppio segno del valore di x ci darebbe, a prima vista, non $2k$, ma $4k$ radici; però, siccome

$$4^{k} \equiv -1 \pmod{p},$$

sarà

$$4^{k+m} \equiv -4^{m} \pmod{p}$$

e per conseguenza

$$4^{(k+m)p^{\lambda-1}} \equiv -4^{mp^{\lambda-1}} \pmod{p^{\lambda}}.$$

Cosicchè, quando a ν si daranno i k valori $k, k+1, k+2, \ldots, 2k-1$, si ottengono numeri congruenti con $-4^{0}, -4^{1}, -4^{2}, \ldots, -4^{k-1}$. I $4k$ valori si riducono dunque a $2k$, e si possono quindi ottenere le $2k$ radici, dando nella (5) a ν successivamente i k valori $0, 1, 2, \ldots, (k-1)$.

b) Sia ora

$$x^{2k} + 1 \equiv 0 \pmod{p^{\lambda}}.$$

Le radici di

$$x^{2k} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

sono (8, 5°) $\pm 2^{k}$ e 2^{β}, ove β rappresenta uno dei $2(k-1)$ numeri primi con $4k$ e non superiori a $4k$.

Si ha per conseguenza

$$\left.\begin{array}{l}(2^{k})^{2k}+1\equiv 0\\(2^{\beta})^{2k}+1\equiv 0\end{array}\right\}\pmod{p},$$

e però

$$\left.\begin{array}{l}(2^{kp^{\lambda-1}})^{2k}+1\equiv 0\\(2^{\beta p^{\lambda-1}})^{2k}+1\equiv 0\end{array}\right\}\pmod{p^{\lambda}}.$$

Dalla prima si ricava

$$x\equiv\pm 2^{kp^{\lambda-1}},$$

e dalla seconda

$$x\equiv\pm 2^{\beta p^{\lambda-1}},$$

ove, tenendo conto del doppio segno, per considerazioni analoghe a quelle fatte precedentemente, basta assegnare a β successivamente valori eguali ai $k-1$ numeri primi con $2k$ e non superiori a $2k$.

5° Sia da risolvere infine la congruenza

$$x^{4k}-N\equiv 0\pmod{p^{\lambda}}.$$

La condizione di possibilità è $N\equiv 1$, e però la precedente congruenza si presenta della forma

$$x^{4k}-1\equiv 0\pmod{p^{\lambda}},$$

la quale, evidentemente, ha le radici espresse da

$$x\equiv\pm u^{p^{\lambda-1}},$$

ove $u=1, 2, 3, \ldots, 2k$.

II.

$p = 4k + 3$.

§ 1.

Esponenti ai quali appartengono i numeri $1, 2, 3, \ldots, (p-1)$.

13. Supponiamo ora p della forma $4k+3$ e quindi $\frac{p-1}{2} = 2k+1$, ove $2k+1$ si suppone un numero primo.

Se $k = 0$, evidentemente 1 apparterrà all'esponente 1, 2 all'esponente 2 e sarà perciò una radice primitiva rispetto a p.

Se $k > 0$, nella serie

$$(1) \qquad 1, 2, 3, \ldots, (p-1),$$

i soli divisori di $p-1$ sono

$$1, \quad 2, \quad 2k+1, \quad 4k+2;$$

e però in essa serie vi sarà un termine appartenente all'esponente 1 che è 1, un termine appartenente all'esponente 2 che è $4k+2$, e inoltre vi saranno $\varphi(2k+1) = 2k$ termini appartenenti all'esponente $2k+1$, e $\varphi(4k+2) = 2k$ termini appartenenti all'esponente $4k+2$.

14. *Esponente* $2k+1$. — Evidentemente un termine qualunque della serie che sia quadrato perfetto e diverso da 1, appartiene all'esponente $2k+1$.

Scegliendo il più piccolo di essi che è 4, i termini della serie (1) appartenenti all'esponente $2k+1$ sono quelli congrui con

$$4, \; 4^2, \; 4^3, \; \ldots, \; 4^{2k}.$$

15. *Esponente* $4k+2$. — Consideriamo tutti i termini appartenenti

agli esponenti 1, 2, $2k+1$, si potrebbero, per esclusione, trovare quelli appartenenti all'esponente $4k+2$, cioè le radici primitive rispetto a p.

Si potrebbe anche osservare che appartenendo -1 all'esponente 2, e 4 all'esponente $2k+1$, ed essendo 2 e $2k+1$ primi fra loro, il numero -4 apparterrà all'esponente $4k+2$, sarà cioè una radice primitiva.

Ma si può trovare immediatamente una radice primitiva per le seguenti considerazioni.

Se a k si dà un valore pari $2m$, si ha $p=8m+3$; se si dà un valore dispari $2m+1$, sarà $p=8m+7$.

Ora quando p si presenta della forma $8m+3$, si sa che 2 non è residuo quadratico e però sarà una radice primitiva; se invece p si presenta della forma $8m+7$, il numero 2 è residuo quadratico, ma non lo è -2.

Si conclude:

TEOREMA. — *Se un numero primo p è della forma $4k+3$ ed è $2k+1$ un numero primo, una radice primitiva rispetto a p sarà 2 ovvero -2, secondo che a k si attribuisce un valore pari ovvero impari.*

§ 2.

Delle congruenze

$$x^2-1\equiv 0,\quad x^{2k+1}-1\equiv 0,\quad x^{4k+2}-1\equiv 0 \pmod p.$$

16. Da quanto abbiamo detto risulta:

1° La congruenza

$$x^2-1\equiv 0 \pmod p$$

ha evidentemente per radici $x\equiv\pm 1$, delle quali $+1$ appartiene a $x-1\equiv 0 \pmod p$, e -1 a $x+1\equiv 0 \pmod p$.

2° La congruenza

$$x^{2k+1}-1\equiv 0 \pmod p$$

ha le radici espresse da 4^δ, ove $\delta=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$

$4^\circ = 1$ appartiene ad $x - 1 \equiv 0 \pmod p$, e le altre $2k - 1$ sono quelle della congruenza

$$x^{2k} + x^{2k-1} + x^{2k-2} + \ldots + x + 1 \equiv 0 \pmod p.$$

3° La congruenza

$$x^{4k+2} - 1 \equiv 0 \pmod p$$

ha per radici $1, 2, 3, \ldots (p-1)$; e poichè

$$x^{4k+2} - 1 = (x^{2k+1} - 1)(x^{2k+1} + 1),$$

così $2k + 1$ radici appartengono alla congruenza

$$x^{2k+1} - 1 \equiv 0 \pmod p$$

e sappiamo che sono espresse da 4^s; le altre $2k + 1$ appartengono alla congruenza

$$x^{2k+1} + 1 \equiv 0 \pmod p,$$

e di esse una, che è -1, appartiene alla congruenza $x + 1 \equiv 0 \pmod p$, e le altre $2k$ appartengono alla congruenza

$$(2) \qquad x^{2k} - x^{2k-1} + x^{2k-2} - x^{2k-3} + \ldots - x + 1 \equiv 0 \pmod p$$

e sono le radici primitive rispetto a p. Cosicchè indicando con s uno qualunque dei $2k$ numeri primi a $4k+2$ e non superiori a $4k+2$, le radici della (2) sono espresse da 2^s ovvero da -2^s, secondo che k è pari ovvero dispari.

17. Per la risoluzione della congruenza

$$x^t - 1 \equiv 0 \pmod p$$

si può ripetere quanto fu detto al n° 9, cosicchè la risoluzione di

essa si riconduce a quella di una delle congruenze precedentemente risolute.

§ 3.

Delle congruenze

$$x^2 - N \equiv 0, \quad x^{2k+1} - N \equiv 0, \quad x^{4k+2} - N \equiv 0 \pmod{p}.$$

18. Avendo risolute le congruenze del paragrafo precedente, riesce facile di risolvere quelle sopra indicate, nelle quali N si suppone primo con p.

1° Sia

$$x^2 - N \equiv 0 \pmod{p}.$$

Perchè essa sia possibile, bisogna che sia

$$N^{2k+1} - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

cioè bisogna che sia N una delle $2k+1$ radici della congruenza

$$x^{2k+1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}.$$

Si ha pertanto (16, 2°)

$$N \equiv 4^{\delta};$$

cosicchè la congruenza data assume la forma

$$x^2 - (2^{\delta})^2 \equiv 0 \pmod{p},$$

dalla quale si deduce immediatamente

$$x \equiv \pm 2^{\delta}.$$

2° Sia ora

$$x^{2k+1} - N \equiv 0 \pmod{p}.$$

La condizione di possibilità è espressa da

$$N^2 - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

cioè

$$N \equiv \pm 1 \pmod{p}.$$

La congruenza data assume quindi la forma

$$x^{2k+1} \mp 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

le cui radici sono note (16, 2° e 3°).

3° Sia infine

$$x^{4k+2} - N \equiv 0 \pmod{p}.$$

La congruenza è possibile solamente nel caso di $N \equiv 1$, e quindi essa assumerà la forma

$$x^{4k+2} - 1 \equiv 0 \pmod{p},$$

le cui radici sono 1, 2, 3, ... $(4k + 2)$.

§ 4.

Delle congruenze

$$x^2 - N \equiv 0, \quad x^{2k+1} - N \equiv 0, \quad x^{4k+2} - N \equiv 0 \pmod{p^\lambda}.$$

19. Per risolvere queste congruenze, ci serviremo dello stesso metodo adoperato nel n° 12.

1° Sia data la congruenza

$$x^2 - N \equiv 0 \pmod{p^\lambda}.$$

Se un valore di x sodisfa a questa congruenza, sodisferà all'altra

$$x^2 - N \equiv 0 \pmod{p};$$

si ha quindi (18, 1°)

$$N \equiv 4^{\delta} \pmod{p}.$$

Elevando a potenza di grado $(2k+1)p^{\lambda-1}$, si ha

$$N^{(2k+1)p^{\lambda-1}} \equiv 1 \pmod{p^\lambda},$$

e, moltiplicando per N,

$$N^{(2k+1)p^{\lambda-1}+1} \equiv N \pmod{p^\lambda}.$$

Siccome $(2k+1)p^{\lambda-1}+1$ è pari, la precedente congruenza si potrà scrivere

$$\left(N^{\frac{(2k+1)p^{\lambda-1}+1}{2}}\right)^2 - N \equiv 0 \pmod{p^\lambda},$$

la quale mostra che le due radici della congruenza data sono

$$x \equiv \pm N^{\frac{(2k+1)p^{\lambda-1}+1}{2}}.$$

2° Si debba ora risolvere la congruenza

$$x^{2k+1} - N \equiv 0 \pmod{p^\lambda}.$$

La condizione di possibilità è espressa (18, 2°) da $N \equiv \pm 1$, cosicchè la precedente congruenza si presenterà della forma

$$x^{2k+1} \mp 1 \equiv 0 \pmod{p^\lambda}.$$

a) Sia

$$x^{2k+1} - 1 \equiv 0 \pmod{p^\lambda}.$$

Poichè le radici della congruenza

$$x^{2k+1} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

sono espresse da 4^δ, così sarà

$$(4^\delta)^{2k+1} \equiv 1 \pmod{p}$$

e però

$$(4^{\delta p^{\lambda-1}})^{2k+1} \equiv 1 \pmod{p^\lambda},$$

donde si ricava

$$x \equiv 4^{\delta p^{\lambda-1}}. \qquad (\delta = 0, 1, 2, \ldots, 2k)$$

b) Sia ora da risolvere

$$x^{2k+1} + 1 \equiv 0 \pmod{p^\lambda}.$$

Le radici della congruenza

$$x^{2k+1} + 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

sono (16, 3°) -1, e 2^ε ovvero -2^ε secondo che k è pari ovvero impari.

La radice -1 evidentemente è anche radice della congruenza data; quanto alle altre $2k$ radici, poichè

$$(2^\varepsilon)^{2k+1} + 1 \equiv 0 \pmod{p} \text{ per } k \text{ pari},$$

$$(-2^\varepsilon)^{2k+1} + 1 \equiv 0 \pmod{p} \text{ per } k \text{ dispari},$$

si ha

$$(2^{\varepsilon p^{\lambda-1}})^{2k+1} + 1 \equiv 0 \pmod{p^\lambda}, \; k \text{ pari}$$

$$(-2^{\varepsilon p^{\lambda-1}})^{2k+1} + 1 \equiv 0 \pmod{p^\lambda}, \; k \text{ dispari}$$

e però

$$x \equiv 2^{\varepsilon p^{\lambda-1}} \text{ se } k \text{ è pari},$$

$$x \equiv -2^{\varepsilon p^{\lambda-1}} \text{ se } k \text{ è dispari}.$$

3° Sia infine da risolvere la congruenza

$$x^{4k+2} - N \equiv 0 \pmod{p^\lambda}.$$

Essa è solo possibile quando $N \equiv 1 \pmod{p}$, cosicchè la congruenza data assume la forma

$$x^{4k+2} - 1 \equiv 0 \pmod{p^\lambda}.$$

Indicando con v uno qualunque dei numeri $1, 2, 3, \ldots, 4k+2$, si ha

$$v^{4k+2} - 1 \equiv 0 \pmod{p}$$

e però

$$(v p^{\lambda-1})^{4k+2} - 1 \equiv 0 \pmod{p^\lambda},$$

dalla quale si ricava

$$x \equiv \pm v p^{\lambda-1},$$

nella quale, tenendo conto del doppio segno, basta dare a v i valori $1, 2, 3, \ldots, 2k+1$.

Palermo, agosto 1898.

ROSARIO ALAGNA.

RIDUZIONE DEI SISTEMI LINEARI ∞^k DI CURVE PIANE DI GENERE 3, PER $k > 1$.

Nota di **Michele de Franchis**, in Palermo.

Adunanza del [illegible] novembre [illegible].

In questa Nota pervengo alla classificazione dei tipi (non equivalenti per trasformazioni Cremoniane del piano) dei sistemi lineari ∞^k ($k > 1$) di curve piane di genere 3 (*).

È da premettere che, per i sistemi semplici (pei quali è certamente $k \geq 3$), la ricerca trovasi fatta, con altri metodi, in una Nota del sig. Castelnuovo dal titolo: *Sulle superficie algebriche le cui sezioni piane sono curve di genere 3* (**). Nella presente Nota ritrovo da un canto i sistemi cui è pervenuto il sig. Castelnuovo, mentre dall'altro canto il metodo impiegato si presta ugualmente per i sistemi non semplici e quindi anche per le reti.

Notiamo che i soli sistemi sovrabbondanti di genere 3 e di

(*) Per [illegible] la mia precedente Nota: *Riduzione dei fasci di curve piane di genere 2* (questi Rendiconti, t. XIII).

(**) Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. XXV; 1890. La ricerca [illegible] nelle due Memorie del sig. Jung: *Ricerche sui sistemi lineari di curve algebriche* [illegible] (Annali di Matematica, t. XV_2 e XVI_2).

dimensione > 1 sono, per le note proprietà della sovrabbondanza (*), ∞^3 di grado 4 ovvero ∞^2 dei gradi 3, 2. Sicchè questa Nota si divide in due parti: nella prima si assegnano i tipi possibili che provengono dalla nota discussione aritmetica già adoperata in analoghe ricerche dai signori Noether, Bertini, Guccia, Martinetti, Jung,... nell'altra si considerano i sistemi sovrabbondanti provenienti dalla discussione aritmetica e si fa la discussione geometrica della loro esistenza.

PARTE I.

Discussione aritmetica.

1. Consideriamo come equivalenti due sistemi lineari di curve piane, quando l'uno possa dedursi dall'altro mediante una trasformazione Cremoniana del piano.

Diremo che un sistema $[\Gamma]$ è un *derivato* di un sistema $[C]$, quando $[\Gamma]$ s'ottenga da $[C]$ imponendo a questo ancora altri punti base semplici. Rammentiamo che un sistema dicesi ***completo,*** quando le condizioni che l'individuano sono fornite esclusivamente dai punti base del sistema. Un sistema completo di cui sia C la curva generica verrà denotato col simbolo $|C|$. I sistemi dei quali discorreremo (ed in questa ricerca ciò non costituisce restrizione) saranno completi, sicchè invece di dire ***sistema lineare completo,*** diremo semplicemente ***sistema lineare*** (e spesso anche soltanto ***sistema***).

In un sistema lineare ∞^k ($k > 1$) di curve piane $|C|$ ha speciale importanza la *serie caratteristica* (**) cioè la serie lineare secata sulla curva generica del sistema dalle rimanenti curve di esso. Se D è il *grado* del sistema (cioè il numero d'intersezioni variabili di due

---

(*) Castelnuovo: *Ricerche generali sopra i sistemi lineari di curve piane.* (Memorie della R. Accademia delle Scienze di Torino, t. XLII, 1891), Cap. II, 18.

(**) Segre: *Sui sistemi lineari di curve piane algebriche di genere p* (Questi Rendiconti, t. I, pag. 217); Castelnuovo: *Ricerche generali sopra i sistemi,* etc., loc. cit., n° 18. Le osservazioni che premettiamo in questo n° sono tratte da questa Memoria del sig. Castelnuovo.

curve di $|C|$), la serie caratteristica è una g_D^{k-1} completa. Il sistema è *regolare* (cioè le condizioni imposte dai punti base sono indipendenti), quando la g_D^{k-1} è una serie non speciale, *sovrabbondante* nel caso contrario. La *sovrabbondanza*, cioè l'eccesso tra la dimensione *effettiva* del sistema e quella calcolata aritmeticamente, non tenendo conto dei legami fra i punti base (dimensione *virtuale*) è un invariante rispetto alle trasformazioni Cremoniane e, denotandola con s, si ha:

$$s = p - D + k - 1,$$

ove con p denotiamo il genere delle C. Per $p = 3$, tutti i sistemi ∞^k $(k > 1)$ sono quindi regolari $(s = 0)$, eccetto quelli ∞^3 di grado $4\,(s = 1)$ e quelli ∞^2 di grado $3\,(s = 1)$ o di grado $2\,(s = 2)$.

Dicesi *semplice* ogni sistema tale che le curve di esso passanti per un punto generico non vadano necessariamente a passare per punti variabili con quello, *non semplice* ogni sistema che non soddisfi alla precedente condizione.

Per classificare i sistemi di curve di genere 3, li ridurremo, con trasformazioni Cremoniane, ad avere il minimo ordine.

2. Premessi questi brevi richiami, sia $|C|$ un sistema lineare ∞^k $(k > 1)$ di curve, di genere 3 e grado D. Siano n l'ordine, $r_1, r_2, \ldots, r_\nu$ le moltiplicità dei punti base (distinti od infinitamente vicini, nel senso di Noether).

Si hanno le relazioni:

$$\sum_{i=1}^{\nu} r_i^2 = n^2 - D \tag{1}$$

$$\sum_{i=1}^{\nu} r_i = 3n - D + 4 \tag{2}$$

$$D \geqq 2, \qquad n > 3. \tag{3}$$

Noi supporremo ordinate le r_i in guisa che sia:

$$r_1 \geqq r_2 \geqq r_3 \geqq \ldots \geqq r_\nu, \tag{4}$$

Se il sistema ha meno di tre punti base, è d'ordine minimo. Poniamo allora $r_1 = a$, $r_2 = b$, $a + b = n - t$ ($a \geq 0$, $b \geq 0$, $t \geq 0$). Essendo le C di genere 3, avremo:

$$(a + b - 1)(a + b - 2) - 6 \leq a(a - 1) + b(b - 1)$$

ossia

$$(a - 1)(b - 1) \leq 3.$$

Da questa, essendo, per la (4), $b \leq a$, ricavasi $b - 1 < 2$.

Quindi o $b = 0$ ovvero $b = 1$ ovvero $b = 2$. Nel 1° caso ($b = 0$), avremo $t > 1$ ed

$$(a + t - 1)(a + t - 2) - 6 = a(a - 1)$$

cioè

$$(5) \qquad 2a(t - 1) + t(t - 3) = 4$$

donde

$$t(t - 3) \leq 4$$

e quindi $t \leq 4$. Quindi i casi possibili sono $t = 2, 3, 4$. Per $t = 4$, la (5) dà $a = 0$, perciò $n = 4$. Si ottiene il sistema $|C_4|$ di tutte le curve del 4° ordine. Per $t = 3$, s'ottiene un sistema $|C_4|$ con un punto base semplice e perciò un sistema derivato (n° 1) di $|C_4|$ (privo perciò d'importanza). Per $t = 2$, è $a = 3$, $n = 5$ e si ha il sistema $|C_5| \equiv |1^3|_5$, cioè il sistema delle curve di 5° ordine con un punto, 1, base triplo.

Nel 2° caso ($b = 1$), si ritroveranno certamente sistemi derivati dei precedenti. Nel 3° caso ($b = 2$), posto $n = a + s$ ($s \geq 2$), si ha:

$$2a(s - 1) + s(s - 3) = 6.$$

Questa (tenendo presente che $a \geq 2$, $s \geq 2$) dà soltanto $s = 2$, $a = 4$ e quindi $n = 6$. S'ottiene così un sistema $|C_6| \equiv |1^4, 2^2|_6$ costituito dalle curve di 6° ordine aventi nel punto 1 un punto quadruplo e nel punto 2 un punto doppio.

I tre sistemi precedentemente trovati sono d'ordine minimo.

3. Un'altra categoria di sistemi lineari d'ordine minimo s'ottiene considerando quei sistemi che, pur avendo tre o più di tre punti base, hanno la somma delle tre moltiplicità più elevate dei punti base non superiore all'ordine, cioè:

$$(6) \qquad r_1 + r_2 + r_3 \leqq n.$$

Noi faremo qui la ricerca di quelli fra tali sistemi aritmeticamente possibili per cui $D = 2$, perchè quelli di grado $D > 2$ s'otterranno da essi togliendo punti base semplici.

Dalla (1) e dalla (2) si ha:

$$(7) \quad r_3 \sum_{i=4}^{\nu} r_i - \sum_{i=4}^{\nu} r_i^2 = n(3r_3 - n) - D(r_3 - 1) - r_3(r_1 + r_2 - 4) + r_1^2 + r_2^2.$$

Il primo membro di quest'eguaglianza è, per le (4), $\geqq 0$, quindi lo stesso succede del secondo membro. Tenute presenti le (4) e la (6), si ha quindi

$$(r_1 + r_2 + r_3)(2r_3 - r_1 - r_2) - D(r_3 - 1) + 4r_3 - r_1 r_3 - r_2 r_3 + r_1^2 + r_2^2 \geqq 0,$$

ossia

$$-2r_1 r_2 + 2r_3^2 - D(r_3 - 1) + 4r_3 \geqq 0.$$

Posto $r_1 = r_3 + t_1$, $r_2 = r_3 + t_2$ $(t_1 \geqq t_2 \geqq 0)$, questa diviene:

$$(8) \qquad 0 \geqq D(r_3 - 1) + 2(t_1 + t_2 - 2)r_3 + t_1 t_2.$$

Essendo $r_3 - 1 \geqq 0$, è $2(t_1 + t_2 - 2)r_3 + t_1 t_2 \leqq 0$. Da questa, con una facile discussione, ricavasi

$$(9) \qquad t_2 = 0$$

e quindi

$$(10) \qquad t_1 = 0,\ 1,\ 2.$$

Ora, per $D = 2$ [tenendo presente la (9)], la (8) dà:

$$(t_1 - 1) r_3 \leqq 1.$$

Sicchè, per $t_1 = 2$, è $r_3 = 1$, donde s'ottiene un sistema derivato dal sistema $|C_5| \equiv |1^3|_5$ trovato al n° 2.

Per $t_1 = 1$, la (7) dà:

$$n(3 r_3 - n) + 3 r_3 + 3 \geqq 0,$$

ossia

$$n(n - 3 r_3) \leqq 3 r_3 + 3,$$

essendo poi $3 r_3 + 1 \leqq n$ [per la (6)],

$$n(n - 3 r_3 - 1) \leqq 2.$$

Ma $n > 3$, quindi $n \leqq 3 r_3 + 1$ e perciò $n = 3 r_3 + 1$.

Posto $r_3 = \rho$, avremo $r_1 = \rho + 1$, $r_2 = r_3 = \rho$, $n = 3\rho + 1$. Chiamato con p_0 il numero delle r_i eguali a ρ (oltre ad r_2, r_3), con p_1 quello delle r_i eguali a $\rho - 1$, ..., con $p_{\rho-1}$ il numero delle r_i eguali ad 1, la (1) e la (2) dànno:

$$p_0 \rho^2 + p_1(\rho - 1)^2 + p_2(\rho - 2)^2 + \ldots + p_{\rho-1} = 6\rho^2 + 4\rho - 2$$

$$p_0 \rho + p_1(\rho - 1) + p_2(\rho - 2) + \ldots + p_{\rho-1} = 6\rho + 4$$

Sottraendo dalla 2ª di queste, moltiplicata per ρ, la 1ª,

$$p_1(\rho - 1) + 2 p_2(\rho - 2) + \ldots + (\rho - 1) p_{\rho-1} = 2.$$

Donde risulta, per ogni i compreso fra 1 e $\rho - 1$ (gli estremi inclusi):

$$i(\rho - i) p_i \leqq 2.$$

Siccome non può essere $p_1 = p_2 = \ldots = p_{\rho-1} = 0$, si avrà

[illegible]

$$[illegible] \leqq [illegible]$$

[illegible] caso, sarà $n > 4$, [illegible] Per [illegible], si ha $n = 10$ e

$$[illegible] = [illegible]$$

$$[illegible] = [illegible]$$

[illegible]

$$[illegible] = [illegible]$$

$$[illegible] = [illegible]$$

[illegible] così un sistema

$$C_{10} \equiv [illegible], 8^3, 9^3, 10^3, 11_{10},$$

[illegible] punto base quadruplo [illegible] base semplice. Nella dimostrazione [illegible] avere la dimensione [illegible] base riducendosi ad un fascio).

Per [illegible], si ha analogamente un sistema

$$C_{7} \equiv [illegible], 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2, 11, 12|_{7}.$$

Resta da considerare il caso $t_1 = 0$. Allora il 2° membro della (7) dà:

$$n(3r_3 - n) - 2(r_3 - 1) - 4r_3 \geqq 0,$$

ossia

$$2(r_3 + 1) \geqq n(n - 3r_3).$$

Essendo $r_3 + 1 < n$, si ricava

$$2 > n - 3r_3,$$

ed, essendo $n - 3r_3 \geqq 0$, è $n = 3r_3 + 1$ ovvero $n = 3r_3$. Posto $r_3 = \rho$, si ha dunque o $n = 3\rho + 1$ o $n = 3\rho$. Denotando con $p_0, p_1, \ldots, p_{\rho-1}$ il numero delle r_i $(i = 4, 5, 6, \ldots, \nu)$ eguali rispettivamente a $\rho, \rho - 1, \ldots, 1$, si ha nel 1° caso $(n = 3\rho + 1)$:

$$p_0\rho^2 + p_1(\rho - 1)^2 + \ldots + p_{\rho-1} = 6\rho^2 + 6\rho - 1$$

$$p_0\rho + p_1(\rho - 1) + \ldots + p_{\rho-1} = 6\rho + 5.$$

Moltiplicando la 2ª di queste per ρ e sottraendo la 1ª,

$$p_1(\rho - 1) + 2p_2(\rho - 2) + \ldots + (\rho - 1)p_{\rho-1} = 1 - \rho.$$

Risulta quindi $1 - \rho \geqq 0$, donde $\rho = 1$. In corrispondenza, s'ottiene un sistema derivato da quello di tutte le curve di 4° ordine.

Nel 2° caso $(n = 3\rho)$ si ha invece:

$$p_0\rho^2 + p_1(\rho - 1)^2 + \ldots + p_{\rho-1} = 6\rho^2 - 2,$$

$$p_0\rho + p_1(\rho - 1) + \ldots + p_{\rho-1} = 6\rho + 2.$$

Si ricava dalla 1ª di queste $p_0 < 6$. Moltiplicando la 2ª per $\rho - 1$ e sottraendola dalla 1ª,

$$p_0\rho - p_2(\rho - 2) - \ldots - (\rho - 2)p_{\rho-1} = 4\rho,$$

dalla quale $p_0 \geqq 4$. Quindi o $p_0 = 4$ o $p_0 = 5$. Per $p_0 = 4$, è $p_2 = p_3 = \ldots = p_{\rho-1} = 0$, e le due equazioni precedenti dànno entrambe:

$$p_1(\rho - 1) = 2(\rho + 1).$$

Dovendo essere $n > 3$ e quindi $\rho \geqq 2$, sarà quindi $p_1 \leqq 6$,

inoltre da questa stessa eguaglianza risulta $p_1 \geq 3$. Quindi $3 \leq p_1 \leq 6$. In corrispondenza ai valori $p_1 = 3, 4, 6$ (i soli possibili), s'ottengono i sistemi:

$$C_{15} \equiv 1^5, 2^5, 3^5, 4^5, 5^5, 6^5, 7^5, 8^4, 9^4, 10^4|_{15}$$

$$C_9 \equiv 1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2|_9$$

$$C_6 \equiv 1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8, 9, 10, 11, 12, 13|_6.$$

Per $p_0 = 5$, le equazioni fondamentali precedenti divengono:

$$p_1(\rho - 1)^2 + p_2(\rho - 2)^2 + \dots + p_{\rho-1} = \rho^2 - 2$$

$$p_1(\rho - 1) + p_2(\rho - 2) + \dots + p_{\rho-1} = \rho + 2$$

e da queste s'ottiene:

$$p_1(\rho - 1) - p_3(\rho - 3) - \dots - p_{\rho-1}(\rho - 3) = 2.$$

Da questa derivasi $p_1 > 0$. Quindi in tal caso pei numeri r_i si hanno le seguenti relazioni:

$$r_1 = r_2 = \dots = r_5 = \rho, \qquad r_6 = \rho - 1, \qquad n = 3\rho,$$

e le (1), (2) del n° 2 dànno:

$$\sum_{i=10}^{\nu} r_i^2 = 2\rho - 3$$

$$\sum_{i=10}^{\nu} r_i = 3.$$

Quest'ultima ammette le seguenti soluzioni:

(α) $\quad r_{10} = r_{11} = r_{12} = 1 \qquad (\nu = 12)$

(β) $\quad r_{10} = 2, \quad r_{11} = 1 \qquad (\nu = 11)$

(γ) $\quad r_{10} = 3. \qquad (\nu = 10)$

In corrispondenza alla (α), si ha $2\rho - 3 = 3$ e quindi $\rho = 3$, $n = 9$, e s'ottiene il sistema

$$|C_9| \equiv |1^3, 2^3, 3^3, \ldots, 8^3, 9^2, 10, 11, 12|_9.$$

In corrispondenza alla (β) si ha il sistema:

$$|C_{12}| \equiv |1^4, 2^4, 3^4, \ldots, 8^4, 9^3, 10^2, 11|_{12}.$$

in corrispondenza alla (γ):

$$|C_{18}| \equiv |1^6, 2^6, 3^6, \ldots, 8^6, 9^5, 10^3|_{18}.$$

In questo modo conosciamo tutti i sistemi aritmeticamente possibili di grado $D = 2$ per cui $r_1 + r_2 + r_3 \leq n$, e quindi, per una considerazione precedente, anche quelli analoghi per cui $D > 2$.

4. La ricerca dei n[i] precedenti ha importanza per questi due fatti:

1° I sistemi trovati non sono trasformabili l'uno nell'altro (cioè costituiscono tipi distinti), perchè sono d'ordine minimo.

2° Quando si abbia un sistema lineare di curve di genere 3, in cui la somma delle moltęplicità dei tre punti base più elevati superi l'ordine, e questi tre punti base non siano tali che due di essi siano, separatamente, infinitamente vicini all'altro (*), si può sempre con una trasformazione quadratica abbassarne l'ordine. Sicchè, se, abbassando successivamente l'ordine, non si presentano mai i tre punti base nelle condizioni eccezionali qui indicate, s'è sicuri di cadere in uno dei tipi provenienti dalla discussione precedente.

Per rendere completa la ricerca dei tipi aritmeticamente possibili dei sistemi lineari di curve di genere 3 (e dimensione > 1), non resta quindi a far altro che ricercare quali siano i sistemi per cui sia

$$(11) \qquad r_1 + r_2 + r_3 > n$$

(*) Usiamo ora e nel seguito queste frasi nel senso introdotto dal signor Noether.

e per cui i punti r_2-plo, r_3-plo siano infinitamente vicini al punto r_1-plo (nell'intorno di 1° ordine di questo) e per cui non esista alcuna trasformazione Cremoniana (= successione di trasformazioni quadratiche) che ne abbassi l'ordine (*).

Perciò osserviamo anzitutto che, per ogni sistema ∞^k ($k > 1$) di curve di genere 3, per cui sia soddisfatta la (11), è $D < 2n + 4$. Questa si ricava subito dalla (2) del n° 2. Quindi

$$(12) \qquad D \leqq 2n + 3.$$

Ciò posto, consideriamo la curva composta $\left(\text{d'ordine } \sum_{k=2}^{\nu} r_k\right)$ costituita dalle rette che dal punto r_1-plo vanno ai punti r_k-pli, contate r_k volte ($k = 2, 3, \ldots, \nu$). Contandone le intersezioni colle curve del sistema dato, riunite nei punti base di questo, si ricava subito:

$$n \sum_{k=2}^{\nu} r_k \geqq r_1 \sum_{k=2}^{\nu} r_k + \sum_{k=2}^{\nu} r_k^2,$$

ossia, per la (1) del n° 2,

$$(n - r_1) \sum_{k=2}^{\nu} r_k \geqq n^2 - D - r_1^2,$$

e, per la (12),

$$(13) \qquad (n - r_1) \sum_{k=2}^{\nu} r_k \geqq n^2 - 2n - 3 - r_1^2.$$

Dico che, *escluso il caso* $r_1 = n - 2$, *esistono punti base del sistema dato che non sono nell'intorno di* 1° *ordine del punto* r_1*-plo;* cioè esistono punti che o sono a distanza finita dal punto r_1-plo o sono satelliti di qualche punto satellite del punto r_1-plo (**).

(*) Le cose che vengon dette nel seguito di questo n° sono note e qui sono messe per comodità di quei lettori che non avessero presente la Memoria del sig. Jung: *Ricerche sui sistemi*, etc., Mem. II, loc. cit. §§ 7, 8 e 9.

(**) La dimostrazione di questo principio, quale qui è fatta, è una imitazione di analoghe del sig. Guccia nelle Note: *Generalizzazione di un teorema di Noether* (questi Rend., t. I, pag. 139) e *Sulla riduzione dei sistemi lineari di curve ellittiche*, etc. (Ibid., pag. 169).

Difatti, se tutti i punti base fossero nell'intorno di 1° ordine del punto r_1-plo, sarebbe, com'è noto,

$$r_1 \geqq \sum_{k=2}^{\nu} r_k ,$$

e la (13) darebbe

$$(n - r_1) r_1 \geqq n^2 - 2n - 3 - r_1^2 ,$$

cioè

$$n r_1 \geqq n(n-2) - 3 ,$$

la quale, tenuto conto che $r_1 \leqq n-2$ e che $n > 3$, non può esser verificata che per $r_1 = n - 2$.

Divideremo quindi questa ricerca in due parti. Nella prima ci occupiamo dei sistemi per cui $r_1 = n - 2$, nella seconda di quelli per cui $r_1 < n - 2$.

Quando $r_1 = n - 2$, sarà necessariamente $r_2 = 2$, $1 \leqq r_3 \leqq 2$, per le condizioni:

$$r_i + r_j \leqq n \qquad (j \neq i)$$

$$r_1 \geqq r_2 + r_3$$

$$r_1 + r_2 + r_3 > n$$

$$r_2 \geqq r_3 \geqq \ldots \geqq r_\nu .$$

Sicchè gli altri punti base sono, al massimo, doppi. Denotando con p_2 il numero delle $r_i = 2$, per $i = 3, 4, \ldots, \nu$ e con p_1 il numero delle $r_i = 1$, le (1), (2) del n° 2 dànno:

$$4p_2 + p_1 = 4n - D - 8,$$

$$2p_2 + p_1 = 2n - D + 4;$$

donde

$$p_2 = n - 6$$

e quindi $n \geqq 6$.

Ma, siccome tutti i punti doppi devono stare nell'intorno di 1° ordine del punto $(n-2)$-plo, altrimenti il sistema potrebbe abbassarsi d'ordine con una trasformazione quadratica, dev'essere: $n-2 \geqq 2(n-6)+2$ e quindi $n \leqq 8$. Segue che i valori possibili di n sono $n=6, 7, 8$.

Per $n=8$, si ha un sistema che indicherò con

$$|C_8|' \equiv |1^6, 2^2, 3^2, 4^2|_8',$$

cioè un sistema di curve d'ottavo ordine con un punto base 6-plo e tre punti doppi ad esso infinitamente vicini, che si possono sempre supporre (e ciò si può ottenere con convenienti trasformazioni quadratiche) su direzioni differenti. Questo sistema è d'ordine minimo, ma non lo è nessun derivato.

Per $n=7$, si ottiene un sistema di curve di settimo ordine con un punto quintuplo e due punti doppi ad esso infinitamente vicini. Questo è d'ordine minimo. Per istudiarne i derivati, osserviamo che si può sempre supporre che i due punti doppi si trovino su direzioni differenti (*), il che si può sempre ottenere con speciali trasformazioni quadratiche. Analogamente può ancora supporsi che un punto base semplice il quale trovisi nell'intorno di 1° ordine del punto quintuplo lo sia sopra una direzione che non vada a nessuno dei punti doppi. Ciò posto, se c'è un punto base semplice satellite di un punto doppio, il sistema non è certamente d'ordine minimo. Lo stesso dicasi se tal punto base è a distanza finita dal 5-plo. Se poi nessun punto base semplice è a distanza finita dal 5-plo nè è satellite di un punto doppio, i punti base semplici stanno tutti sopra un ciclo lineare, uscente dal punto 5-plo, la cui tangente non passa per nessun punto doppio. Se vi è quindi un sol punto base semplice ovvero due punti base semplici su tal ciclo, il sistema è d'ordine minimo, mentre che se ve ne sono più di due, il sistema è d'ordine minimo soltanto quando essi stanno su un ciclo (lineare

---

(*) In condizioni analoghe ho supposto tacitamente ridotti i sistemi dotati di singolarità straordinarie di cui discorro nella Nota sulla *Riduzione dei fasci di genere* 2, loc. cit., n° 1.

e) di seconda classe (altrimenti esisterebbe una trasformazione de Jonquières di 4° ordine abbassante l'ordine del sistema).

Noi denoteremo quindi con

$$|C_7|' \equiv |1^5,\ 2^2,\ 3^2,\ \dots|_7'$$

un sistema di curve di 7° ordine dotato di un punto base quintuplo, di due punti base doppi ad esso infinitamente vicini in direzioni diverse e forse di altri punti base semplici; coll'avvertenza che questi stanno sopra un ciclo lineare non contenente nessuno dei punti doppi e che, se il loro numero è > 2, tal ciclo è di seconda classe. Un tal sistema è d'ordine minimo.

Per $n = 6$, con una discussione analoga, s'ottiene un sistema

$$|C_6|' \equiv |1^4,\ 2^2,\ \dots|_6',$$

cioè un sistema di curve di 6° ordine con un punto quadruplo, un punto doppio ad esso infinitamente vicino e forse altri s $(0 \leqq s \leqq 14)$ punti base semplici. Esso inoltre soddisfa alle seguenti restrizioni:

1° Nessun punto base semplice è satellite del punto doppio.

2° Tutti i punti base semplici o stanno sopra un ciclo di second'ordine e prima classe (avente l'origine nel punto 4-plo), ed allora il loro numero non supera 4; ovvero tutti i punti base stanno su cicli lineari (al massimo 2) uscenti dal punto 4-plo. In quest'ultimo caso, un ciclo lineare su cui stiano più di due punti base semplici è necessariamente di seconda classe.

Tali sistemi sono d'ordine minimo.

I tre tipi precedenti provengono dall'aver supposto $r_1 = n - 2$. Per discutere ora il caso $r_1 < n - 2$, adopereremo il noto metodo di Noether. Porremo:

$$r_1 = j, \qquad r_2 = i_1, \qquad r_3 = i_2$$

e chiameremo $i_3,\ i_4,\ \dots,\ i_m$ le moltiplicità degli altri eventuali punti base che stanno nell'intorno di 1° ordine del punto j-plo, con $h_1,\ h_2,\ \dots,\ h_q$ le moltiplicità di quelli che non stanno in tale

intorno. È da osservare che è $m \geqq 2$, mentre $q \geqq 1$. Messe in un ordine conveniente le b e le i, si hanno le relazioni:

$$(14)\qquad \begin{cases} j \geqq \sum_{k=1}^{m} i_k \\ j + i_1 + i_2 > n \\ n - j > 2 \\ i_1 \geqq i_2 \geqq i_3 \geqq \ldots \geqq i_m \\ i_2 \geqq b_1 \geqq b_2 \geqq \ldots \geqq b_q \end{cases}$$

I sistemi pei quali $j + 2b_1 > n$, non sono, com'è noto, d'ordine minimo. Quindi dobbiamo occuparci di quelli per cui

$$j + 2b_1 \leqq n$$

ossia

$$(15)\qquad b_1 \leqq \frac{n-j}{2}.$$

Possiamo, per le (14) e la (15), porre:

$$i_k^2 = s_k i_1^2, \quad b_l^2 = \left(\frac{n-j}{2}\right)^2 \sigma_l \quad (k = 1, 2, \ldots, m; \ l = 1, 2, \ldots, q)$$

ove

$$0 \leqq s_k \leqq 1, \qquad 0 \leqq \sigma_l \leqq 1,$$

sicchè

$$i_k \geqq s_k i_1, \qquad b_l \geqq \sigma_l \frac{n-j}{2}.$$

Con ciò, le (1), (2) del n° 2 dànno:

$$j^2 + i_1^2 \sum_{k=1}^{m} s_k + \left(\frac{n-j}{2}\right)^2 \sum_{l=1}^{q} \sigma_l = n^2 - D$$

$$j + i_1 \sum_{k=1}^{m} s_k + \frac{n-j}{2} \sum_{l=1}^{q} \sigma_l \leqq 3n - D + 4.$$

Moltiplicando la 2ª di queste per $\frac{n-j}{2}$ e sottraendo dalla 1ª e riducendo, si ha:

$$(16)\qquad D \geqq \frac{n-j}{2}(2j-n+D-4)+j(n-j-i_1).$$

Essendo $n-j>2$, è quindi

$$(17)\qquad D>(2j-n+D-4)+j(n-j-i_1).$$

Osserviamo che è $n-j-i_1 \geqq 0$, quindi sarà

$$D>2j-n+D-4,$$

donde $2j-n<4$. D'altro canto, $2j \geqq j+i_1+i_2>n$, quindi $2j-n>0$, e perciò può essere:

$$2j-n=3,\ 2,\ 1.$$

In tutti questi casi, dev'essere $n-j-i_1=0$, perchè se fosse $n-j-i_1 \geqq 1$, dovrebbe, per la (17), essere

$$D>D-3+j,$$

mentre per le condizioni $n>3$, $2j \geqq n+1$, è $j \geqq 3$.

Quindi è

$$(18)\qquad n=j+i_1.$$

Se fosse $2j-n=3$, s'avrebbe $i_1=j-3$ e quindi $i_2 \leqq 3$. La (16) e la (18) darebbero allora

$$\frac{j-3}{2} \leqq \frac{D}{D-1},$$

dalla quale, osservando che $D \geqq 2$, si ha $j \leqq 7$. D'altro canto, essendo $j-3=n-j>2$, è $j \geqq 6$. Quindi o $j=6$ o $j=7$.

Per $j=6$, $n=9$, $i_1=3$ ed osservando che un sistema di curve di 9° ordine con un punto 6-plo ed uno 3-plo è del genere 10, si vede subito che non gli si possono imporre punti tripli o doppi sintanto che il genere s'abbassi a 3, mantenendo il sistema d'ordine minimo. Analoghe considerazioni mostrano che nemmeno per $j=7$ si possono avere sistemi d'ordine minimo.

Supponiamo ora $2j-n=2$. Allora $i_1=j-2$. Tutti gli altri punti base non possono essere che doppi o semplici (dovendo il sistema esser d'ordine minimo). Denotando con p_2 il numero dei punti base doppi e con p_1 quello dei semplici, le (1), (2) del n° 2 dànno:

$$4p_2+p_1=2j^2-4j-D$$

$$2p_2+p_1=4j-D,$$

laonde

$$p_2=j(j-4)$$

$$p_1=2j(6-j)-D.$$

Quest'ultima, tenuto presente che $D\geq 2$, dà $j\leq 5$, ma, dovendo essere $j-2=n-j>2$ e quindi $j\geq 5$, è $j=5$. In corrispondenza a questo valore, è $n=8$, $p_2=5$, $i_1=3$ ed il sistema non può mai esser d'ordine minimo.

Supponiamo finalmente $2j-n=1$. Allora è $i_1=j-1$ e quindi gli altri punti base (se il sistema è d'ordine minimo) non possono essere che semplici. Tenendo conto che le curve del sistema sono di genere 3, ricavasi

$$(j-1)(j-2)=3,$$

la quale non è verificata da nessun valore intero di j.

Si conchiude che per $r_1<n-2$ non c'è nessun sistema ∞^k $(k>1)$ di ordine minimo (e di genere 3) per cui sia $r_1+r_2+r_3>n$.

In conclusione:

I tipi aritmeticamente possibili (*) *dei sistemi lineari* ∞^k $(k > 1)$ *di curve piane di genere* 3 *sono:*

(*a*) $|C_4|$

(*b*) $|C_5| \equiv |1^3|_5$

(*c*) $|C_6| \equiv |1^4, 2^2|_6$

(*d*) $|C_6| \equiv |1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2|_6$

(*e*) $|C_7| \equiv |1^3, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2|_7$

(*f*) $|C_9| \equiv |1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^2|_9$

(*g*) $|C_9| \equiv |1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2|_9$

(*h*) $|C_{10}| \equiv |1^4, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3, 10^3|_{10}$

(*i*) $|C_{12}| \equiv |1^4, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4, 7^4, 8^4, 9^3, 10^2|_{12}$

(*l*) $|C_{15}| \equiv |1^5, 2^5, 3^5, 4^5, 5^5, 6^5, 7^5, 8^4, 9^4, 10^4|_{15}$

(*m*) $|C_{18}| \equiv |1^6, 2^6, 3^6, 4^6, 5^6, 6^6, 7^6, 8^6, 9^5, 10^3|_{18}$

(*n*) $|C_6|' \equiv |1^5, 2^2, \ldots|_6'$

(*o*) $|C_7|' \equiv |1^5, 2^2, 3^2, \ldots|_7'$

(*p*) $|C_8|' \equiv |1^6, 2^2, 3^2, 4^2|_8'$

ovvero *derivati dei sistemi* (*a*), (*b*), (*d*), (*e*), (*f*), (*h*), (*i*) (**).

(*) Cioè provenienti dalla discussione aritmetica precedente.

(**) Alcuni di questi sistemi erano noti: nella seconda parte (dopo avere escluso quelli geometricamente impossibili) faremo le citazioni opportune. In tal parte vedremo che non esistono i tipi (*h*), (*m*) e che dei tipi (*f*), (*l*) esistono soltanto derivati (cioè tali sistemi devono avere necessariamente punti base semplici).

Col simbolo $C_n^r \equiv \{1^a, 2^b, \dots, \nu^l\}_n$ *denotiamo qui un sistema di curve d'ordine* n *con i punti base* 1, 2, ..., ν *multipli rispettivamente secondo* $a, b, \dots, l$ *(distinti od infinitamente vicini).*

I sistemi (*n*), (*o*), (*p*) *hanno inoltre i punti base doppi infinitamente vicini al punto base* 1, *in direzioni diverse. Il sistema* (*n*) *ha* s $(1 \leq s \leq 14)$ *punti base semplici e soddisfa a queste restrizioni:*

1° *Nessun punto base semplice è satellite del punto doppio.*

2° *Tutti i punti base semplici o stanno sopra un ciclo di second'ordine e prima classe* (avente l'origine nel punto 4-plo), *ed allora il loro numero non supera* 4; *ovvero tutti i punti base semplici stanno su cicli lineari* (al massimo 2) *uscenti dal punto* 4-plo. *In quest'ultimo caso, un ciclo lineare su cui stiano più di due punti base semplici, è necessariamente di seconda classe.*

I sistemi (*o*) *possono avere* s $(0 \leq s \leq 14)$ *punti base semplici, non satelliti dei punti doppi, situati su un ciclo lineare uscente dal punto* 5-plo. *Se il loro numero supera* 2, *tal ciclo dev'essere di seconda classe.*

Il sistema (*p*) *non ha punti base semplici.*

PARTE II^a.

Discussione geometrica.

5. Esaurita così la ricerca aritmetica precedente, bisogna vedere quali dei sistemi trovati esistano effettivamente. Basterà cercare i sistemi sovrabbondanti provenienti dalla discussione aritmetica e studiarne l'esistenza.

I sistemi lineari ∞^i $(i > 1)$ sovrabbondanti di curve di genere 3 possono essere ∞^2 od ∞^3. Nel primo caso è $D = 4$ e la serie caratteristica (n° 1) è la serie canonica g^2_4. Segue che in tal caso il sistema è semplice (cioè tale che le curve del sistema passanti per un punto generico del piano non passano per un altro punto con quello variabile), se la curva generica non è iperellittica; invece è non semplice nel caso contrario. In quanto alle reti sovrabbondanti, il loro grado può essere (n° 1) $D = 3$ ovvero $D = 2$. Nel 1° caso ($D = 3$) la serie caratteristica è una g^1_3 *e quindi non può la curva*

generica della rete essere iperellittica (perchè la g_3^1 è la residua di un punto della curva generica, rispetto alla serie canonica); nel 2° caso invece ($D = 2$) la serie caratteristica è una g_2^1, quindi *la curva generica della rete è iperellittica.*

6. SISTEMI SOVRABBONDANTI ∞^3.—In un sistema sovrabbondante ∞^3, $|C|$, d'ordine n e genere 3, essendo la serie caratteristica la serie canonica, si ricava che ogni curva componente di una curva aggiunta (d'ordine $n-3$) alla curva generica di $|C|$ fa parte di una curva di $|C|$.

Derivati del sistema (a) (n° 4, ultima proposizione) che siano di grado $D = 4$, sono sistemi $|C_4| \equiv |1, 2, 3, \ldots, 12|_4$. Affinchè un tal sistema (che è, in generale, ∞^2) risulti ∞^3, è necessario e sufficiente (per l'osservazione precedente) scegliere i 12 punti base in questo modo: secando una curva di 4° ordine con una cubica (irreducibile o no). Il sistema di curve di 4° ordine passanti per i 12 punti così ottenuti è ∞^3. Un tal sistema è necessariamente semplice (perchè la curva generica non può essere iperellittica).

Un sistema ∞^3 di grado $D = 4$ derivato del sistema (b) non può esser semplice (perchè la curva generica è iperellittica). Esso sarà un sistema $|C_5| \equiv |1^3, 2, 3, 4, \ldots, 13|_5$. Per mostrarne l'esistenza, consideriamo una curva di 5° ordine C_5 con un punto triplo, 1, ed una curva di 3° ordine C_3 passante per 1. Siano 2, 3, ..., 13 gli altri 12 punti d'intersezione di C_3 e C_5. Considerando il sistema lineare individuato da C_5 e dalle curve composte della parte fissa C_3 e di una qualunque coppia di rette uscenti da 1, questo è un sistema del tipo voluto. Un'altra dimostrazione dell'esistenza di sistemi ∞^3 sovrabbondanti del tipo $|C_5| \equiv |1, 2, 3, \ldots, 13|_5$, la quale fornisce un sistema ancor più generale del precedente, sorge mediante una trasformazione doppia (*) di cui ci serviremo in seguito.

Considerando in un piano π la rete di cubiche passanti per 7 punti 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, e facendo corrispondere alle curve di

(*) Vedasi De Paolis: *Le trasformazioni piane doppie* (Memoria della R. Accademia dei Lincei, 1877), n° 28.

essa le rette d'un altro piano π', ai 2 punti d'intersezione variabili di due curve della rete il punto d'intersezione delle corrispondenti rette, s'ottiene una trasformazione doppia.

La curva di diramazione del piano π' (curva il cui punto generico corrisponde a due punti coincidenti di π) è una curva C'_4 di 4° ordine priva, in generale, di punti multipli. Alle rette di π corrispondono curve di 3° ordine di π' le quali toccano C'_4 dovunque l'incontrano; ai punti $1, 2, 3, \ldots, 7$ corrispondono 7 rette tangenti doppie di C'_4, etc. etc. Una tale trasformazione verrà denotata con ζ. Se, in particolare, i 6 punti $2, 3, 4, \ldots, 7$ stanno sopra una conica, la curva di diramazione C'_4 acquista un punto doppio O' corrispondente a tutta la conica, alle rette di π corrispondono cubiche aventi in O' punto doppio e toccanti C'_4 negli altri punti d'incontro, ai punti $2, 3, \ldots, 7$ corrispondono le tangenti condotte da O' a toccare altrove C'_4, mentre al punto 1 corrisponde una tangente doppia di C'_4, etc. etc. Questa trasformazione verrà denotata con ζ'.

Consideriamo nel piano π' il sistema ∞^3 delle curve di 3° ordine aventi nel punto singolare O' punto doppio ed aventi tre punti base semplici A', B', C'. Il sistema ∞^3 che gli corrisponde su π è un sistema $|C_5| \equiv |1^3, 2, \ldots, 12, 13|_5$, cioè un sistema ∞^3 di grado 4, derivato di (b).

Per dimostrare l'esistenza di sistemi ∞^3 sovrabbondanti e semplici derivati dal sistema (d), cioè sistemi

$$|C_6| \equiv |1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8, 9, 10, 11|_6,$$

consideriamo nel piano π ad arbitrio 7 punti $1, 2, \ldots, 7$ e la rete di curve di 3° ordine $|C_3| \equiv |1, 2, 3, \ldots, 7|_3$. Indi consideriamo nel piano un punto A, e sia B il nono punto base del fascio di cubiche passanti per $1, 2, \ldots, 7, A$. Consideriamo una qualunque curva C_6 di 6° ordine irreducibile avente punti doppi in $1, 2, \ldots, 7$ e passante per A ma non per B, indi una cubica della rete $C_3|$, C'_3, non passante per A (e quindi nemmeno per B). Il sistema ∞^3 individuato da C_6 e dalla rete di curve composte dalla C'_3 fissa e dalle curve della rete $|C_3|$ è un sistema ∞^3 di grado 4

derivato da (d). Esso è semplice: infatti le curve del sistema passanti per A non hanno in comune altri punti fuori di A e dei punti base del sistema.

Per dimostrare poi l'esistenza di sistemi ∞^3 sovrabbondanti ma non semplici, dello stesso tipo $|C_6| \equiv |1^2, 2^2, \ldots, 7^2, 8, 9, 10, 11|_6$, consideriamo la trasformazione doppia ζ, sopra definita, del piano π nel piano π' e nel piano π' consideriamo il sistema ∞^3 delle coniche passanti per due punti. Ad esso corrisponde in π un sistema $|C_6|$, non semplice, del tipo voluto.

L'esistenza di sistemi ∞^3 sovrabbondanti del tipo (e), semplici, è nota (*). In quanto all'esistenza di sistemi ∞^3 sovrabbondanti non semplici del tipo (e), si può provare servendosi della trasformazione doppia ζ'. Basta considerare nel piano doppio π' il sistema ∞^3 di curve di 3° ordine passanti pel punto singolare O', aventi un punto doppio dato β e tangenti in un punto dato α alla curva di diramazione C'_4. Il sistema che gli corrisponde in π è della natura voluta.

In quanto ai sistemi derivati da (f), anzitutto osserviamo che le curve C_9 aventi otto punti tripli $1, 2, \ldots, 7, 8$ ed un punto doppio 9, dati, passano tutte per un punto fisso (semplice) 10 che giace sulla cubica C_3 passante per $1, 2, \ldots, 8, 9$. Questa proposizione è evidente (**).

Ciò serve a provare anzitutto che non esiste il tipo (f) (di grado 5) ma ne esiste un derivato ∞^3 e di grado 4. L'esistenza di un cosiffatto sistema semplice è già nota (***). In quanto all'esistenza di sistemi ∞^3 di grado 4 derivati di (f) e non semplici, si prova mediante la solita trasformazione doppia ζ. Basta assumere nel piano doppio il sistema delle cubiche aventi un punto base doppio β, posto sulla curva di diramazione C'_4 ed aventi ivi una tangente fissa nella tangente a C'_4, e tangenti inoltre a C'_4 in un altro punto dato γ. Il sistema corrispondente su π è della natura voluta.

(*) Noether: *Ueber die rationalen Flächen vierter Ordnung* (Math. Ann., Bd. 33). Del resto era anche nota l'esistenza di tutti i sistemi sovrabbondanti e semplici ∞^3 dei quali discorriamo, tali sistemi rappresentando le superficie razionali di 4° ordine senza curve multiple.

(**) Jung: *Ricerche*, etc., loc. cit., Mem. II, § 11, n° 67, nota.

(***) Noether: *Ueber die rationalen*, etc., loc. cit.

In quanto ai sistemi ∞^3 sovrabbondanti dei tipi (n), (o) (i soli che diano tipi possibili, diversi dai precedenti, di sistemi ∞^3), osserviamo che (n° 5) essi non possono esser semplici.

Per provare l'esistenza di sistemi del tipo (n) ∞^3 e sovrabbondanti, cioè di sistemi ∞^3 $C_6' \equiv |1^4, 2^2, 3, \dots, 14|_6'$ (n° 4, in fine), consideriamo una curva C_6 di 6° ordine avente un punto, 1, quadruplo, un punto, 2, doppio ad esso infinitamente vicino, ed avente ancora due cicli non passanti per 2 (e quindi lineari), di 2ª classe. Siano t, l le tangenti a tali due cicli. Consideriamo il sistema ∞^3 individuato da C_6 e da una rete, la cui curva generica si componga delle rette t, l contate due volte e di una coppia di rette qualunque uscenti dal punto 1. Tal sistema ∞^3 è della natura voluta (*).

Per provare l'esistenza di sistemi ∞^3 $|C_7|' \equiv |1^5, 2^2, 3^2, 4, \dots, 14|_7'$, considerisi una curva C_7 avente un punto quintuplo, 1, due punti doppi 2, 3 ad esso infinitamente vicini, ed avente ancora un ciclo non passante nè per 2 nè per 3 (necessariamente lineare), di 2ª classe. Sia t la tangente a tal ciclo. Consideriamo il sistema ∞^3 determinato da C_7 e dalla rete la cui curva generica si scinde nella t contata 5 volte ed in una coppia di rette uscenti da 1. Questo è un sistema della natura voluta (ed è l'unico di tal natura).

7. Sistemi ∞^2 di grado 3.—Esaurita così la ricerca dei sistemi ∞^3 sovrabbondanti (di grado 4), passiamo a quella delle reti di grado 3 (la cui sovrabbondanza è $= 1$). Osserviamo che esistono sempre reti di grado 3 derivate da sistemi semplici ∞^3 di grado 4. Quindi *esistono reti di grado 3 derivate dai sistemi* (a), (d), (e), (f). Invece (n° 5) *non esistono reti di grado 3 derivate dal sistema* (b) *ovvero dei tipi* (n), (o). Resterebbero a discutersi due reti di grado 3 che proverrebbero dalla discussione aritmetica precedente (n° 4), cioè:

(i) $\qquad |C_{12}| \equiv |1^4, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4, 7^4, 8^4, 9^3, 10^2|_{12}$

(h) $\qquad |C_{10}| \equiv |1^4, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3, 10^3|_{10}$.

(*) Un altro sistema dello stesso tipo s'otterrebbe, p. e., considerando nella rete ausiliaria come parte fissa la retta t contata 3 volte ed l contata una volta.

Mostreremo che questi due tipi non possono esistere. In quanto al tipo (i), consideriamo la cubica passante per i punti 1, 2, ..., 8, 9: esso non può aver punto doppio in nessuno di essi (fintanto che tali punti sono a distanza finita), nè passare per 10 senza che il sistema (i) diventi riducibile. Essa vien secata in un punto dalle C_{12}, quindi questo punto è fisso ed il sistema non sarà certamente di grado 3 (ma di grado 2 o di grado 0). Questo ragionamento si può applicare ancora (con leggere modificazioni) quando i punti 1, 2, 3, ..., 9 siano, in modo qualunque, addensati fra loro.

La dimostrazione della non esistenza del tipo (b) riesce alquanto più complicata. Essa deriva dalle considerazioni seguenti.

Consideriamo il sistema aggiunto a $|C_{10}|$:

$$|C_7| \equiv |1^3, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2|_7;$$

di esso non sappiamo null'altro che è certamente ∞^2 e che le sue curve secano sulla C_{10} generica la serie canonica g_4^2. Non sappiamo nulla se esso sia o no irreducibile. Consideriamo un punto A del piano: tutte le C_{10} passanti per A devono inoltre passare per altri due punti B, C; una curva del sistema $|C_7|$ passante per B e per C passa anche per A e seca inoltre la C_{10} in un punto K che è residuo della serie caratteristica g_3^1 rispetto alla serie canonica g_4^2 (giacenti sulla data C_{10}). È da osservare che la stessa C_7 gode della stessa proprietà rispetto a tutte le ∞^1 C_{10} passanti per A, B, C. Facendo variare il gruppo A, B, C sulla data C_{10} si ottengono ∞^1 curve C_7 tutte passanti per K.

Al variare della curva C_{10}, potrebbe variare o no questo sistema ∞^1 di curve C_7. Nel primo caso si vede facilmente che sarebbero razionali tutte le componenti variabili delle curve della rete $|C_7|$, ossia che il sistema aggiunto puro a $|C_{10}|$ dovrebbe essere una rete di curve razionali (completa e perciò) omaloidica. Ma allora trasformando il piano in maniera che a questa rete corrispondesse la rete delle rette, alla rete $|C_{10}|$ corrisponderebbe una rete di curve del 4° ordine, il che è assurdo (perchè $|C_{10}|$, se esiste, è d'ordine minimo).

Nel secondo caso invece la rete $|C_7|$ dovrebbe contenere un

fascio speciale di curve tale che, denotandone con C' la componente variabile, essa secherebbe ogni C_{10} solo in 3 punti variabili, costituenti un gruppo della serie caratteristica g^1_3. Sicchè queste componenti variabili sarebbero certamente irreducibili. Se mostriamo che è impossibile l'esistenza delle C', avremo mostrato evidentemente l'impossibilità dell'esistenza di $|C_{10}|$.

Denotiamo con n l'ordine e con $r_1, r_2, \ldots, r_{10}$ la moltiplicità delle C' nei punti base 1, 2,..., 10 di $|C_{10}|$.

Dovremmo avere:

$$4r_1 + 3(r_2 + r_3 + \ldots + r_{10}) = 10n - 3. \qquad (n \leqq 7)$$

Posto $r_1 = x$, $r_2 + r_3 + \ldots + r_{10} = y$, avremo:

$$4x + 3y = 10n - 3.$$

Per l'irreducibilità delle C', dev'essere $x < n$, quando $n > 1$.

Per $n = 1$, l'equazione testè scritta è soddisfatta solo da $x = 1$, $y = 1$ la quale darebbe $r_1 = 1$, $r_2 = 1$, il che è incompatibile col fatto che le C' devono formare fascio.

Per $n = 2$ $(x < 2)$, non si può aver soluzione.

Per $n = 3$ $(x < 3)$, si può avere soltanto $x = 0$, $y = 9$. Questa fornirebbe un fascio di cubiche non passanti pel punto 1. Ma la cubica del fascio passante per 1 avrebbe nei punti base 31 intersezioni colle C_{10}, e queste non sarebbero irreducibili.

Per $n = 4$ $(x < 4)$, si può avere solo $x = 1$, $y = 11$. Questa, badando che le C' devono formare un fascio irreducibile) dà un sol fascio del tipo $C' \equiv (1, 2^2, 3^2, 4, 5, \ldots, 10)_4$. Ma un cotal fascio porterebbe alla riducibilità di C_{10}, perchè la retta $(2, 3)_1$ fondamentale per tal fascio ha come residua una cubica passante per i 10 punti base, il che porta alla riducibilità di C_{10}.

Per $n = 5$, la sola soluzione possibile $(x < 5)$ è $x = 2$, $y = 13$ la quale darebbe un sol fascio possibile del tipo

$$C' \equiv (1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6, 7, 8, 9, 10)_5.$$

La conica $(1, 2, 3, 4, 5)_2$ la quale è fondamentale monova-

lente per tal fascio (perchè le C' sono irreducibili) avrebbe per residua una cubica pei dieci punti 1, 2, ..., 10, il che, al solito, è assurdo.

Per $n=6$, le sole soluzioni possibili ($x<6$) sono $x=0$, $y=19$; $x=3$, $y=15$. Accettando la 1ª soluzione, sarebbero le C' curve di 6° ordine non passanti per 1, formanti un sistema ∞^1 ed aventi 57 intersezioni riunite colle C_{10} nei punti base.

Ma allora la C' passante per 1 ne avrebbe riunite 61, il che porterebbe alla riducibilità delle C_{10}. La soluzione $x=3$, $y=15$ offre un sol fascio possibile, il fascio $C'\equiv(1^3, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8, 9, 10)_6$.

I punti 1, 2, 3 per l'irreducibilità di C' non saranno in linea retta, nè 2, 3 sono contemporaneamente nell'intorno di 1° ordine del punto 1, sicchè esiste una trasformazione quadratica abbassante l'ordine delle C' (ma non alterante quello delle C_{10}), e ci ridurremmo perciò ad uno dei precedenti casi (*).

Per $n=7$ ($x<7$), si hanno le soluzioni aritmetiche $x=1$, $y=21$; $x=4$, $y=17$. La prima è subito da scartare, perchè non può il sistema $|C_7|$ aggiunto a $|C_{10}|$ contenere un fascio di curve di 7° ordine dotate nel punto 1 di moltiplicità <3. La seconda soluzione darebbe la sola soluzione geometricamente possibile

$$C'\equiv(1^4, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10).$$

Ma la trasformazione quadratica avente per punti fondamentali i punti 1, 2, 3 ci ricondurrebbe ad uno dei casi precedenti.

8. Sistemi ∞^2 di grado 2.—Per essi la sovrabbondanza è $=2$. Imponendo alle curve di un sistema lineare non semplice ∞^3, di grado 4 (di genere 3) di passare per un punto generico, esse vanno in conseguenza a passare per un altro punto fisso, formando una rete di grado 2. In conseguenza (n° 6), possiamo affermare che:

Esistono reti di grado 2 derivate dai sistemi (b), (d), (e), (f).

Invece (n° 5) *non esistono reti di grado 2 derivate dal sistema* (a).

(*) La stessa dimostrazione si poteva fare nel caso $n=5$, come viceversa quella fatta per $n=5$ potrebbe ripetersi qui.

Per mostrare l'esistenza di reti del tipo (g), considerisi la solita trasformazione doppia ζ del piano π nel piano π' (n° 6). In questo consideriamo la rete di cubiche aventi un punto base doppio α e toccanti la curva di diramazione C'_4 in due punti dati β, γ. A tal rete corrisponde su π una rete del tipo (g).

Analogamente, servendosi della stessa trasformazione, si perviene a dimostrare l'esistenza di reti derivate dal tipo (i). Basta considerare sul piano doppio π' la rete di curve di 4° ordine dotate d'un tacnodo situato in un dato punto α della curva di diramazione C'_4 e colla tangente tacnodale nella tangente in α a C'_4, di un punto base doppio β su C'_4, con una tangente fissa nella tangente in β a C'_4 e toccanti inoltre la C'_4 in un punto fisso γ. La rete corrispondente su π è del tipo (i).

Analogamente provasi l'esistenza di reti del tipo (l): basta considerare sul piano doppio π' una rete di curve di 5° ordine dotate di tre tacnodi α, β, γ giacenti su C'_4 ed aventi per tangenti tacnodali le tangenti ivi a C'_4.

Per mostrare l'esistenza di reti di grado 2 del tipo (n), considerisi una curva C_6 dotata d'un punto 4-plo, 1, e d'un punto doppio, 2, ad esso infinitamente vicino e tale inoltre da avere ancora due cicli (lineari e) di 2ª classe coll'origine in 1 e non passanti per 2. Siano t, l le tangenti a tali cicli. La rete individuata da C_6 e dal fascio riducibile la cui curva generica si compone della retta t contata 3 volte, della l contata 2 volte e di una qualsiasi retta uscente da 1 è una rete del tipo (n), di grado 2.

Analogamente per mostrare l'esistenza di reti di grado 2 del tipo (o), considerisi una curva C_7 di 7° ordine dotata di un punto 5-plo, 1, di due punti doppi, 2, 3, ad esso infinitamente vicini ed ancora di un ciclo uscente da 1, non passante per 2, 3, (lineare e) di 2ª classe. Sia t la tangente a tal ciclo, considerisi la rete individuata da C_7 e da un fascio riducibile la cui curva generica si compone della t contata 6 volte e di una retta qualsiasi uscente da 1. Questa è una rete della natura voluta (ed è l'unica di tal natura).

Restano da discutersi i tipi provenienti da (b), (m), cioè

$$|C_{10}| \equiv |1^4, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^3, 10^3, 11|_{10}$$

$$|C_{18}| \equiv |1^6, 2^6, 3^6, 4^6, 5^6, 6^6, 7^6, 8^6, 9^5, 10^3|_{18}.$$

Sistemi ∞^2 cosiffatti non possono esistere, come ora mostreremo.

In quanto al $|C_{18}|$, si dimostra subito che esso non può esistere (o meglio che la dimensione di un sistema dotato di cotali punti base è < 2, possedendo necessariamente il sistema altri punti fissi). Basta per questo ripetere le cose dette per dimostrare la non esistenza di reti del tipo (i) di grado 3.

La dimostrazione della non esistenza della rete $|C_{10}|$ è alquanto più complicata (*). Consideriamo il sistema aggiunto

$$|C_7| \equiv |1^3,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ 6^2,\ 7^2,\ 8^2,\ 9^2,\ 10^2 \ldots|_7 .$$

Di questo null'altro si sa che è ∞^2 e che seca sulla C_{10} generica la serie canonica g_4^2. Essendo le C_{10} iperellittiche (se esiste la rete $|C_{10}|$), la g_4^2 è composta colla serie caratteristica g_2^1. Consideriamo le C_7 passanti pel punto 11. Queste devono necessariamente formare un fascio le cui curve devono secare ancora una C_{10} data in un punto fisso (sulla data C_{10}) ed inoltre nei gruppi della serie g_2^1.

Sicchè, chiamando con C' la componente variabile della curva generica di tal fascio (la quale componente è certo irreducibile), le C' formano un fascio irreducibile secante la C_{10} generica (oltre ai punti base) in gruppi della serie caratteristica. Essendo 66 le intersezioni che le C_7 generiche hanno riunite colle C_{10} nei punti base $1, 2, \ldots, 10$, le C' avranno in 11 al massimo punto doppio. Ma ogni C' fa evidentemente parte di una curva C_{10}, sicchè (avendo le C_{10} un sol punto base semplice in 11) non possono le C' aver punto doppio in 11. Sicchè, denotando con $r_1, r_2, \ldots, r_{10}, r_{11}$ le moltiplicità delle C_7, con n il loro ordine e ponendo $r_2 + r_3 + \ldots$ $\ldots + r_{10} = y$, $r_1 = x$, si avrà:

$$0 < n \leqq 7, \qquad 0 \leqq r_{11} \leqq 1,$$

e

$$4x + 3y + r_{11} = 10n - 2.$$

(*) Esistono però fasci di curve di 10° ordine aventi un punto base quadruplo, nove punti base tripli e tre punti base semplici, com'è facile vedere.

Supponiamo anzitutto $r_{11} = 0$.

Allora, per $n = 1$ $(x \leqq 1)$ non si ha soluzione.

Per $n = 2$ $(x \leqq 1)$ si ha la soluzione $x = 0$, $y = 6$, la quale è geometricamente assurda.

Per $n = 3$ $(x \leqq 2)$ si ha $x = 1$, $y = 8$, la quale darebbe il fascio di cubiche $(1, 2, \ldots, 9)_3$. Ma questo porterebbe alla riducibilità di $|C_{10}|$.

Per $n = 4$ $(x \leqq 3)$ si ha la soluzione $x = 2$, $y = 10$ che dà un'unica soluzione geometrica del tipo: $C' \equiv (1^2, 2^2, 3, 4, \ldots, 10)_4$; ma allora esisterebbe una trasformazione quadratica che ci ridurrebbe al caso precedente.

Analogamente, senza più entrare in dettagli, s'escludono i casi $n = 5, 6, 7$.

Supposto poi $r_{11} = 1$, si ricade nella discussione fatta al n° 7.

Quindi *la rete* $|C_{10}|$ *non esiste*.

In conclusione:

I tipi (non equivalenti per trasformazioni birazionali del piano) dei sistemi lineari di curve di genere 3 e dimensione > 1 *sono:*

(*a*) $|C_4|$

(*b*) $|C_5| \equiv |1^3|_5$

(*c*) $|C_6| \equiv |1^4, 2^2|_6$

(*d*) $|C_6| \equiv |1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2|_6$

(*e*) $|C_7| \equiv |1^3, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8^2, 9^2, 10^2|_7$

(*f*) $|C_9| \equiv |1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^3, 9^2, 10|_9$

(*g*) $|C_9| \equiv |1^3, 2^3, 3^3, 4^3, 5^3, 6^3, 7^3, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2|_9$

(*i*) $|C_{12}| \equiv |1^4, 2^4, 3^4, 4^4, 5^4, 6^4, 7^4, 8^4, 9^3, 10^2, 11|_{12}$

(*l*) $|C_{15}| \equiv |1^5, 2^5, 3^5, 4^5, 5^5, 6^5, 7^5, 8^4, 9^4, 10^4|_{15}$

(*n*) $|C_6|' \equiv |1^4, 2^2, \ldots|'_6$

(*o*) $|C_7|' \equiv |1^5, 2^2, 3^2, \ldots|'_7$

(*p*) $|C_8|' \equiv |1^6, 2^2, 3^2, 4^2|'_8$

ovvero derivati dei sistemi (*a*), (*b*), (*d*) (*e*), (*f*) (*).

Per la spiegazione dei precedenti simboli, vedasi l'ultima proposizione del n° 4.

Pei sistemi sovrabbondanti si hanno soltanto i seguenti tipi:

I. — *Sistemi* ∞^3 *di grado* 4.

(*a*) $|C_4| \equiv |1, 2, 3, \ldots, 12|_4$ (semplici)

(*b*) $|C_5| \equiv |1^3, 2, 3, \ldots, 13|_5$ (non semplici)

(*d*) $|C_6| \equiv |1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, 6^2, 7^2, 8, 9, 10, 11|_6$ (semplici e non semplici)

(*e*) $|C_7| \equiv |1^3, 2^2, 3^2, \ldots, 10^2|_7$ (semplici e non semplici)

(*f*) $|C_9| \equiv |1^3, 2^3, \ldots, 8^3, 9^2, 10|_9$ (semplici e non semplici)

(*n*) $|C_6|' \equiv |1^4, 2^2, 3, 4, \ldots, 14|'_6$ (non semplici)

(*o*) $|C_7|' \equiv |1^5, 2^2, 3^2, 4, \ldots, 15|'_7$ (non semplici).

II. — *Sistemi* ∞^2 *di grado* 3.

(*a*) $|C_4| \equiv |1, 2, \ldots, 12, 13|_4$

(*d*) $|C_6| \equiv |1^2, 2^2, \ldots, 7^2, 8, 9, \ldots, 12|_6$

(*e*) $|C_7| \equiv |1^3, 2^2, 3^2, \ldots, 10^2, 11|_7$.

(*f*) $|C_9| \equiv |1^3, 2^3, \ldots, 8^3, 9^2, 10, 11|_9$

(*) Dei tipi precedenti quelli che risultano di grado $D > 3$ erano noti [cioè (*a*), (*b*), (*c*), (*d*), (*e*), (*f*), (*n*), (*o*), (*p*)]. Veggasi Jung: *Ricerche*, etc., loc. cit., Mem. I, Tabella V, e Mem. II, § 7, 8 e 9; Castelnuovo: *Sulle superficie algebriche le cui sezioni sono curve di genere* 3, loc. cit. Nella Mem. I del sig. Jung trovasi inoltre il *simbolo* del sistema (*i*).

III. — *Sistemi* ∞^2 *di grado* 2 (*).

(*b*) $|C_5| \equiv |1^3, 2, 3, \ldots, 15|_5$

(*d*) $|C_6| \equiv |1^2, 2^2, \ldots, 7^2, 8, 9, \ldots, 13|_6$

(*e*) $|C_7| \equiv |1^3, 2^2, \ldots, 10^2, 11, 12|_7$

(*f*) $|C_9| \equiv |1^3, 2^3, \ldots, 8^3, 9^2, 10, 11, 12|_9$

(*g*) $|C_9| \equiv |1^3, 2^3, \ldots, 7^3, 8^2, 9^2, 10^2, 11^2|_9$

(*i*) $|C_{12}| \equiv |1^4, 2^4, \ldots, 8^4, 9^3, 10^2, 11|_{12}$

(*l*) $|C_{15}| \equiv |1^5, 2^5, \ldots, 7^5, 8^4, 9^4, 10^4|_{15}$

(*n*) $|C_6|' \equiv |1^4, 2^2, 3, 4, \ldots, 15, 16|_6'$

(*o*) $|C_7|' \equiv |1^5, 2^2, 3^2, 4, \ldots, 16, 17|_7'$.

Palermo, novembre 1898.

MICHELE DE FRANCHIS.

(*) La ricerca dei sistemi ∞^2 di grado 2 (e conseguentemente anche di quelli ∞^3 di grado 4 non semplici) coincide colla ricerca dei piani doppi razionali la cui curva di diramazione è una C_8, e si poteva fare anche ponendo la questione sotto quest'aspetto.

·: DI 360 COLLINEAZIONI PIANE.

. **Gerbaldi**, in Palermo (*).

·.anze del 22 gennajo e 12 febbrajo 1899.

·ni di 2° e di 3° grado tra le forme f, f', φ, φ'.

. in un punto qualunque del piano assumono le forme) possono essere considerati come sei coordinate omo- :to; simplemente i valori che per una retta qualunque del ·no le forme φ (oppure le φ') possono essere considerati ·ordinate omogenee della retta. Tali sei coordinate sono relazioni di secondo grado, cui abbiamo già accennato al he qui ci proponiamo di stabilire; tali coordinate poi sono colate nei n[i] 12, 14, 16, 18 per tutte le sorta di punti ·l gruppo G_{360}.

Considerando una conica degenerata in una retta doppia, che ha equazione (in coordinate proiettive) $u_x = 0$, possiamo porre (n° 8)

$$u_x^2 = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_6 f_6.$$

(*) Continuazione, vedi t. XII (1898), pp. 23-94.

Volendo determinare i parametri λ, basta sostituire in questa equazione ad $x_r x_s$ i coefficienti di $u_r u_s$ delle forme φ_i; il risultato della sostituzione in u_x^2 è φ_i, in f_k è $= 0$, se $k \neq i$, ed è $= 3$, se $k = i$; quindi si ricava $\varphi_i = 3\lambda_i$, e però si ha la notevole identità

$$(62) \qquad 3u_x^2 = f_1\varphi_1 + f_2\varphi_2 + \cdots + f_6\varphi_6.$$

Similmente si dimostra

$$(62') \qquad 3u_x^2 = f'_1\varphi'_1 + f'_2\varphi'_2 + \cdots + f'_6\varphi'_6.$$

Segue che la condizione, affinchè una retta di coordinate φ_i (ovvero φ'_i) ed un punto di coordinate f_i (ovvero f'_i) si appartengano, è

$$\sum_i f_i\varphi_i = 0, \quad \text{ovvero} \quad \sum_i f'_i\varphi'_i = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

Le equazioni (34), (38), (48), (54), (56) rappresentano in particolare rette unite del gruppo G_{360}; dalle (34) si deduce che le coordinate φ della retta $u_{(34)(56)}$ sono

$$\frac{-2c'}{\varphi_1} = \frac{-2c'\varepsilon^2}{\varphi_2} = \frac{1}{\varphi_3} = \frac{\varepsilon^2}{\varphi_4} = \frac{\varepsilon^2}{\varphi_5} = \frac{1}{\varphi_6};$$

dalle (38) si deduce che le coordinate φ della retta $p_{23,1}$ sono

$$\frac{(c'-1)\varepsilon}{\varphi_1} = \frac{0}{\varphi_2} = \frac{0}{\varphi_3} = \frac{1}{\varphi_4} = \frac{\varepsilon}{\varphi_5} = \frac{1}{\varphi_6};$$

ecc.

Riguardando il secondo membro della (62) come una forma quadratica nelle u_1, u_2, u_3, che è un quadrato esatto, si conclude che la sua forma aggiunta è identicamente nulla; quindi per le (18') si ha

$$\frac{\partial\Theta'(f)}{\partial f_i} = 0, \qquad (i = 1, 2, \ldots 6)$$

ossia per esteso

$$
(63)\quad \left\{
\begin{aligned}
& 2c'f_1^2 + \varepsilon^2(f_2f_3 + f_3f_4 + f_4f_5 + f_5f_6 + f_6f_2) \\
& \qquad + \varepsilon(f_2f_4 + f_4f_6 + f_6f_3 + f_3f_5 + f_5f_2) = 0, \\
& 2c'f_2^2 + \varepsilon^2(f_1f_3 + f_3f_5 + f_5f_4 + f_4f_6 + f_6f_1) \\
& \qquad + \varepsilon(f_1f_4 + f_4f_3 + f_3f_6 + f_6f_5 + f_5f_1) = 0, \\
& 2c'f_3^2 + \varepsilon^2(f_1f_2 + f_2f_5 + f_5f_6 + f_6f_4 + f_4f_1) \\
& \qquad + \varepsilon(f_1f_5 + f_5f_4 + f_4f_2 + f_2f_6 + f_6f_1) = 0, \\
& 2c'f_4^2 + \varepsilon^2(f_1f_3 + f_3f_6 + f_6f_2 + f_2f_5 + f_5f_1) \\
& \qquad + \varepsilon(f_1f_2 + f_2f_3 + f_3f_5 + f_5f_6 + f_6f_1) = 0, \\
& 2c'f_5^2 + \varepsilon^2(f_1f_4 + f_4f_2 + f_2f_3 + f_3f_6 + f_6f_1) \\
& \qquad + \varepsilon(f_1f_2 + f_2f_6 + f_6f_4 + f_4f_3 + f_3f_1) = 0, \\
& 2c'f_6^2 + \varepsilon^2(f_1f_2 + f_2f_4 + f_4f_3 + f_3f_5 + f_5f_1) \\
& \qquad + \varepsilon(f_1f_3 + f_3f_2 + f_2f_5 + f_5f_4 + f_4f_1) = 0.
\end{aligned}
\right.
$$

A queste stesse equazioni si dimostra similmente che soddisfano le φ'. Scambiando poi c' in c ed ε in ε^2 si deduce un analogo sistema di equazioni, alle quali soddisfano le f' e le φ.

Una notevole relazione di 3° grado soddisfatta dalle f, e conseguenza delle precedenti, è data dall'annullarsi del discriminante della (62) considerata come forma quadratica delle u; essa è (n° 8): $\Theta'(f) = 0$. Così pure per le φ' si ha l'identità: $\Theta'(\varphi') = 0$; e per le f' e le φ si hanno le identità: $\Theta(f') = 0$, $\Theta(\varphi) = 0$. Ciascuna di queste identità è trasformata in sè dalle sostituzioni che subiscono le f, o le φ', o le f', o le φ, corrispondentemente alle collineazioni di G_{360}; colle stesse sostituzioni poi ogni identità del sistema (63) si cambia in un'altra dello stesso sistema.

Per designare la forma quadratica f_i scritta ora colle variabili x_1, x_2, x_3 ora colle variabili y_1, y_2, y_3 adopreremo rispettivamente le notazioni $f_i(x, x)$, $f_i(y, y)$; significato analogo avranno le notazioni

$\varphi_i(u, u)$, $\varphi_i(v, v)$. Porremo inoltre

$$2f_i(x, y) = \sum_{k=1}^{3} y_k \frac{\partial f_i(x, x)}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{3} x_k \frac{\partial f_i(y, y)}{\partial y_k},$$

$$2\varphi_i(u, v) = \sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial \varphi_i(u, u)}{\partial u_k} = \sum_{k=1}^{3} u_k \frac{\partial \varphi_i(v, v)}{\partial v_k}.$$

Ciò posto, si deduce subito dalle (62):

$$3\, u_x u_y = \sum_{i=1}^{6} f_i(x, y)\varphi_i(u, u), \tag{64}$$

$$3\, u_x v_x = \sum_{i=1}^{6} f_i(x, x)\varphi_i(u, v); \tag{65}$$

donde si vede che una coppia di rette u, v è rappresentata dall'equazione $\sum \lambda_i f_i = 0$, essendo $\lambda_i = \varphi_i(u, v)$; ed una coppia di punti x, y è rappresentata dall'equazione $\sum l_i \varphi_i = 0$, essendo $l_i = f_i(x, y)$.

Dalle (62) e (64) si ha

$$9\, u_x^2 . u_y u_z = \sum_{i,k} f_i(x, x) f_k(y, z)\varphi_i(u, u)\varphi_k(u, u)$$

$$9\, u_x u_y . u_x u_z = \sum_{i,k} f_i(x, y) f_k(x, z)\varphi_i(u, u)\varphi_k(u, u),$$

quindi è

$$\sum_{i,k} [f_i(x, x) f_k(y, z) - f_i(x, y) f_k(x, z)]\varphi_i(u, u)\varphi_k(u, u) = 0;$$

ora, se v_1, v_2, v_3 sono i determinanti della matrice $\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$ e w_1, w_2, w_3 quelli della matrice $\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$, si ha

$$f_i(x, x)f_k(y, z) - f_i(x, y)f_k(x, z) + f_k(x, x)f_i(y, z) - f_k(x, y)f_i(x, z) = 2\Theta\tau_{ik}(v, w) \qquad i \neq k$$

$$f_i(x, x)f_i(y, z) - f_i(x, y)f_i(x, z) = \Theta\varphi_i(v, w);$$

dunque, convenendo che sia $\tau_{ik} = \varphi_i$ se $i = k$, si ha

$$\sum_{i,k} \tau_{ik}(v, w)\varphi_i\varphi_k = 0; \tag{66}$$

e queste, fissate arbitrariamente v, w, sono relazioni quadratiche alle quali soddisfano le φ. Similmente si hanno le relazioni quadratiche soddisfatte dalle f

$$\sum_{ik} t_{ik}(y, z)f_if_k = 0, \tag{67}$$

dove y, z sono fissate ad arbitrio, e si conviene che sia $t_{ik} = f_i$ quando $i = k$. Queste, sebbene si possano dedurre dalle (63), non si possono sostituire a quelle, perchè combinando linearmente le (63) si ottengono ∞^5 relazioni quadratiche tra le f_i e nelle (67) se ne hanno soltanto ∞^4. Notiamo poi che le identità (66), (67) sussistono ancora se si suppone $v_r = w_r = u_r$, ovvero $y_r = z_r = x_r$ $(r = 1, 2, 3)$; in questa ipotesi sostituendo alle τ le loro espressioni lineari (14) nelle φ, o alle t le loro espressioni lineari (14') nelle f, le (66) e (67) si cambiano in relazioni di 3° grado tra le φ o le f, che sono niente altro che $\Theta(\varphi) = 0$, $\Theta'(f) = 0$.

Notiamo infine che, avendosi

$$\frac{\partial\Theta'(f)}{\partial f_i} = \frac{1}{2}\sum_{1}^{6}\frac{\partial^2\Theta'(f)}{\partial f_i\partial f_k}f_k, \quad \frac{\partial^2\Theta'(f)}{\partial f_i\partial f_k} = 6\,t_{ik},$$

le (63) si possono anche scrivere nella forma

$$\sum_{1}^{6} t_{ik}(x, x)f_k(x, x) = 0. \qquad (i = 1, 2, \dots 6) \tag{63'}$$

30. — *Le relazioni di 4° grado tra le forme f, e la Superficie di Steiner.*

Fra le forme f prese quattro a quattro passano relazioni di 4° grado, poichè, se i valori di quattro forme f si considerano come le coordinate omogenee di un punto dello spazio, si ha in questo, come è noto, una superficie di Steiner. Volendo formare ad esempio la relazione biquadratica tra le f_1, f_2, f_3, f_4 si può eliminare f_5, f_6 dalle equazioni (63), e perciò basta servirsi delle prime quattro di queste equazioni considerate come lineari rispetto a f_5, f_6 ed $f_5 f_6$; ma noi preferiamo giungere alla detta relazione per un'altra via.

Quando si fa la rappresentazione piana della superficie di Steiner, le sue sezioni piane hanno per imagini le coniche del sistema lineare

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0;$$

le coniche che stanno nei quattro piani doppi hanno per imagini le tangenti comuni alle coniche (5) e (6) cioè le rette $p_{56,1}$, $p_{56,2}$, $p_{56,3}$, $p_{56,4}$; e le tre rette doppie hanno per imagini i lati del triangolo Δ_{56}, cioè le rette $u_{(23)(14)}$, $u_{(31)(24)}$, $u_{(12)(34)}$.

Poniamo

$$(68)\qquad \begin{cases} x_1 = \varepsilon f_1 + f_2 - \varepsilon f_3 - f_4 \\ x_2 = \varepsilon f_1 - f_2 + \varepsilon f_3 - f_4 \\ x_3 = \varepsilon f_1 - f_2 - \varepsilon f_3 + f_4 \\ x_4 = (c-1)(\varepsilon f_1 + f_2 + \varepsilon f_3 + f_4); \end{cases}$$

le equazioni $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ dànno nel piano rappresentativo tre coppie di rette, che sono i lati del triangolo Δ_{56} presi due a due (*),

(*) Per la retta $u_{(23)(14)}$ si ha (n° 12)

$$\varepsilon f_1 - f_4 = 0, \qquad f_2 - \varepsilon f_3 = 0,$$

e per la retta $u_{(31)(24)}$ si ha

$$f_1 - f_3 = 0, \qquad f_2 - f_4 = 0;$$

dunque per tutte due queste rette si ha $x_1 = 0$.

e quindi nello spazio rappresentano i tre piani, che passano due a due per le tre rette doppie della superficie; l'equazione $x_4 = 0$ dà nel piano rappresentativo la conica T_{56}, cioè la conica dei 14 punti rispetto al quadrilatero circoscritto a (5) e (6), e quindi nello spazio rappresenta il piano che passa pei i punti coniugati del punto triplo rispetto alle coppie di punti cuspidali sulle rette doppie.

Poniamo inoltre

$$(69) \quad \begin{cases} (2c+3)y_1 = (2c+1)\varepsilon f_1 - 2f_2 - 2\varepsilon f_3 - 2f_4 \\ (2c+3)y_2 = -2\varepsilon f_1 + (2c+1)f_2 - 2\varepsilon f_3 - 2f_4 \\ (2c+3)y_3 = -2\varepsilon f_1 - 2f_2 + (2c+1)\varepsilon f_3 - 2f_4 \\ (2c+3)y_4 = -2\varepsilon f_1 - 2f_2 - 2\varepsilon f_3 + (2c+1)f_4; \end{cases}$$

le equazioni $y_i = 0$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ dànno nel piano rappresentativo le rette $p_{56,1}$, $p_{56,2}$, $p_{56,3}$, $p_{56,4}$ (ciascuna come retta doppia), (*) e quindi nello spazio rappresentano i quattro piani doppi della superficie.

Or bene si ha, come mostrano le (68) e (69),

$$(70) \quad \begin{cases} 4y_1 = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \\ 4y_2 = x_1 - x_2 - x_3 + x_4 \\ 4y_3 = -x_1 + x_2 - x_3 + x_4 \\ 4y_4 = -x_1 - x_2 + x_3 + x_4; \end{cases}$$

dunque l'equazione della superficie di Steiner, riferita al tetraedro di faccie $x_i = 0$ col piano unità in uno dei piani doppi, è, siccome è noto:

$$(71) \qquad x_2^2 x_3^2 + x_3^2 x_1^2 + x_1^2 x_2^2 - 2x_1 x_2 x_3 x_4 = 0.$$

(*) I secondi membri della (69) si ottengono applicando alla (38) le operazioni Z^3, TZ^3, T^2Z^3, OT^2Z^3.

Sostituendo qui alle x le loro espressioni (68), si ha la relazione cercata tra f_1, f_2, f_3, f_4, che sviluppata e scritta per disteso è

$$
(72) \quad
\begin{aligned}
0 = {} & 3(\varepsilon f_1^4 + f_2^4 + \varepsilon f_3^4 + f_4^4) - 12 c \varepsilon^2 f_1 f_2 f_3 f_4 \\
& + 2(c-1)[\varepsilon^2 f_1^2 f_2^2 + \varepsilon f_1^2 f_3^2 + \varepsilon^2 f_1^2 f_4^2 + \varepsilon^2 f_2^2 f_3^2 + f_2^2 f_4^2 + \varepsilon^2 f_3^2 f_4^2] \\
& - (c+2)[f_1^3 f_2 + \varepsilon f_1^3 f_3 + f_1^3 f_4 + \varepsilon f_2^3 f_1 + \varepsilon f_2^3 f_3 + f_2^3 f_4 \\
& + \varepsilon f_3^3 f_1 + f_3^3 f_2 + f_3^3 f_4 + \varepsilon f_4^3 f_1 + f_4^3 f_2 + \varepsilon f_4^3 f_3] \\
& + (c+2)[f_1^2 f_2 f_3 + \varepsilon^2 f_1^2 f_2 f_4 + f_1^2 f_3 f_4 + \varepsilon^2 f_2^2 f_1 f_3 + \varepsilon f_2^2 f_1 f_4 + \varepsilon f_2^2 f_3 f_4 \\
& + f_3^2 f_1 f_2 + f_3^2 f_1 f_4 + \varepsilon^2 f_3^2 f_2 f_4 + \varepsilon f_4^2 f_1 f_2 + \varepsilon^2 f_4^2 f_1 f_3 + \varepsilon f_4^2 f_2 f_3].
\end{aligned}
$$

Applicando le (11) e (12) alle (68) si trova

$$
(73) \quad
\left\{
\begin{array}{llll}
T x_1 = - x_3, & T x_2 = x_1, & T x_3 = - x_2, & T x_4 = x_4, \\
O x_1 = x_1, & O x_2 = x_3, & O x_3 = x_2, & O x_4 = x_4;
\end{array}
\right.
$$

donde segue che al gruppo ottaedrico di collineazioni piane, che permuta fra loro le coniche (1), (2), (3), (4) e che è generato dalle operazioni T, O, corrisponde nello spazio un gruppo di 24 collineazioni, generato dalle (73), che trasforma in sè la superficie Steineriana. Quest'ultimo gruppo, se $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$ sono tre piani ortogonali ed $x_4 = 0$ è il piano all'infinito, è il vero gruppo ottaedrico di rotazioni nello spazio intorno al punto triplo: cioè la superficie di **Steiner** ammette le simmetrie dell'ottaedro.

Osserviamo ancora sulle (69) che si ha

$$
(74) \quad
\left\{
\begin{array}{llll}
T y_1 = [illegible], & T y_2 = [illegible], & T y_3 = [illegible], & T y_4 = y_4, \\
O y_1 = [illegible], & O y_2 = [illegible], & O y_3 = [illegible], & O y_4 = y_3;
\end{array}
\right.
$$

donde segue che il gruppo di 24 collineazioni che trasforma in sè la superficie di Steiner, ne permuta in tutti i modi i quattro piani doppi.

Un altro ottaedro di cui le facce e vertici sono permutati in tutti i modi dallo stesso gruppo è quello che da noi è stato preso come

tetraedro fondamentale per le coordinate. Questo ha la notevole proprietà che la *terna di piani tangenti alla superficie di Steiner, che si possono condurre per ogni spigolo, ha per coppia hessiana le due faccie concorrenti in quello spigolo* (*).

Esiste un altro tetraedro che gode della stessa proprietà. Invero nel piano rappresentativo della superficie di Steiner consideriamo il quadrilatero, che ha per lati le imagini delle coniche dei piani doppi; poi nella schiera di coniche iscritte a questo quadrilatero scegliamo quelle due, che sono involutorie, come coniche (5) e (6). Allora nel sistema lineare quadruplo di coniche-luogo, che sono armoniche colle coniche inviluppo della detta schiera, oltre alla quaterna di coniche (1), (2), (3), (4), esiste un'altra quaterna di coniche, che colle (5) e (6) formano una sestupla involutoria (n° 25); le equazioni delle coniche di questa altra quaterna sono (**):

$$
(75)\qquad \left\{
\begin{aligned}
&(8c-7)\varepsilon f_1 + 5 f_2 + 5\varepsilon f_3 + 5 f_4 = 0,\\
&5\varepsilon f_1 + (8c-7) f_2 + 5\varepsilon f_3 + 5 f_4 = 0,\\
&5\varepsilon f_1 + 5 f_2 + (8c-7)\varepsilon f_3 + 5 f_4 = 0,\\
&5\varepsilon f_1 + 5 f_2 + 5\varepsilon f_3 + (8c-7) f_4 = 0;
\end{aligned}
\right.
$$

e però queste equazioni rappresentano nello spazio le faccie di quell'altro tetraedro, che rispetto alla superficie di Steiner ha le stesse proprietà del tetraedro sopra considerato.

Questi due tetraedri, quando si prende il tetraedro dei piani doppi per tetraedro coordinato ed il punto triplo per punto unità, hanno le

(*) Infatti, se $f_i = 0$, $f_k = 0$ ($i, k = 1, 2, 3, 4$) sono le equazioni di due faccie, le equazioni dei piani tangenti alla superficie di Steiner condotti dal loro spigolo sono

$$f_i - f_k = 0, \qquad f_i - \varepsilon f_k = 0, \qquad f_i - \varepsilon^2 f_k = 0,$$

perchè queste nel piano rappresentativo sono le equazioni di coniche degeneri (n° 12).

(**) Si formano applicando la sostituzione $Z^3\,T$ alle (61).

facce rappresentate dalle equazioni:

$$(76)\qquad \left|\begin{array}{l} (-5 \pm i\sqrt{15})y_1 + 4y_2 + 4y_3 + 4y_4 = 0, \\ 4y_1 + (-5 \pm i\sqrt{15})y_2 + 4y_3 + 4y_4 = 0, \\ 4y_1 + 4y_2 + (-5 \pm i\sqrt{15})y_3 + 4y_4 = 0, \\ 4y_1 + 4y_2 + 4y_3 + (-5 \pm i\sqrt{15})y_4 = 0. \end{array}\right.$$

31. — *Rappresentazione delle coniche del piano su uno spazio R_5.*

A stabilire analiticamente la rappresentazione delle coniche di un piano π su uno spazio a cinque dimensioni, R_5, è per noi in particolar modo conveniente il fissare nel piano π una sestupla **S** involutoria di coniche; in questo modo ritroveremo qui le principali proprietà, già note (*), di tale rappresentazione.

Interpretando i parametri $l_1, l_2, \ldots, l_6$ come le sei coordinate omogenee di un punto l in uno spazio R_5, alla conica-inviluppo del piano π, che ha per equazione $\sum_i l_i \varphi_i = 0$ faremo corrispondere in R_5 il punto l.

Allora, se $\Theta'(l)$ è la funzione di 3° grado nelle l_i definita al n° 8, l'equazione $\Theta'(l) = 0$ rappresenta in R_5 una varietà cubica a quattro dimensioni, M_4^3, i punti della quale hanno per imagini in π le coniche-inviluppo degenerate in coppie di punti, e quest'equazione è identicamente soddisfatta quando alle l_i si attribuiscono i valori, che per una coppia di punti qualunque x, y del piano π assumono le forme polari $f_i(x, y)$, (n° 29).

Se alle l_i si assegnano più particolarmente i valori, che assumono le forme quadratiche $f_i(x, x)$ in ogni punto x di π, si hanno in R_5

(*) Vedi C. Segre: Considerazioni intorno alla geometria delle coniche di un piano ecc., *Atti R. Accademia Torino*, v. XX, 1885; e G. Veronese: La superficie omaloide normale a due dimensioni e del quarto ordine dello spazio a cinque dimensioni, ecc., *Memorie R. Accademia Lincei*, s. III, v. XIX, 1884.

i punti di una varietà di quart'ordine a due dimensioni, F_2^4, che hanno per imagini in π le coniche-inviluppo degenerate in punti doppi; le equazioni (63), scritte colle variabili l_i in luogo delle f_i, rappresentano in R_5 sei quadriche, che sono quadriche polari rispetto alla varietà M_4^3 e che contengono la F_2^4. I punti della F_2^4 sono dunque punti doppi della M_4^3, e la M_4^3 si può considerare come luogo delle corde della F_2^4.

Siano ora $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_6$ le sei coordinate omogenee di un R_4, si consideri cioè quello spazio lineare R_4 (che diremo *iperpiano*), di cui il punto generico l soddisfa all'equazione $\sum \lambda_i l_i = 0$. Ai punti di quest'iperpiano corrispondono in π le coniche-inviluppo di un sistema lineare quadruplo, che hanno per equazioni $\sum l_i \varphi_i = 0$, dove i parametri l_i sono legati dalla relazione lineare $\sum \lambda_i l_i = 0$; or bene è individuata una conica-luogo, armonica a tutte quelle coniche-inviluppo, essa ha per equazione $\sum \lambda_i f_i = 0$; infatti, per il n° 8, $\sum l_i \lambda_i$ è un invariante simultaneo delle due coniche $\sum l_i \varphi_i = 0$, e $\sum \lambda_i f_i = 0$, e qui è per ipotesi $\sum \lambda_i l_i = 0$; dunque esiste una corrispondenza univoca e reciproca tra gli iperpiani di R_5 e le coniche-luogo di π. Se Γ è la conica di π, che nel senso ora detto corrisponde a un iperpiano R_4, i punti della varietà, M_3^3, sezione di M_4^3 con R_4 hanno per imagini in π le coppie di punti reciproci rispetto a Γ; i punti della curva, C^4, sezione di F_2^4 con R_4 hanno per imagini in π i punti di Γ.

Se l'iperpiano è tangente a F_2^4, la curva C^4 e la sua imagine Γ hanno punto doppio; dunque l'equazione $\Theta(\lambda) = 0$, che esprime la condizione affinchè si spezzi la conica $\sum \lambda_i f_i = 0$, esprime altresì la condizione affinchè l'iperpiano di coordinate λ_i sia tangente a F_2^4; cioè gli iperpiani tangenti di F_2^4 formano una varietà a quattro dimensioni di 3^a classe, $\mathbf{M}_4^3$, corrispondente per dualità alla M_4^3 e rappresentata dall'equazione $\Theta(\lambda) = 0$. Quest'equazione poi è soddisfatta sempre quando alle λ_i si attribuiscono i valori, che per una coppia qualunque di rette u, v del piano π assumono le forme polari $\varphi_i(u, v)$.

Se l'iperpiano è tangente doppio di F_2^4, la conica Γ degenera in una retta doppia, mentre la curva C^4 si riduce ad una conica contata due volte; questi iperpiani tangenti-doppi formano una varietà a due dimensioni di 4^a classe, Φ_2^4, corrispondente per dualità alla F_2^4; le loro coordinate λ_i sono i valori, che assumono le forme quadratiche $\varphi_i(u, u)$

sulle rette u del piano π, e soddisfanno alle sei equazioni quadratiche $\frac{\partial\Theta(\lambda)}{\partial\lambda_i}=0$ analoghe alle (65).

Se, in R_5, d'un punto $(l_1, l_2, \dots l_6)$ si prende l'iperpiano, che è polare lineare rispetto alla varietà cubica M_4^3, le sue coordinate $(\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_6)$ sono espresse da

$$\rho\lambda_i = \frac{\partial\Theta'(l)}{\partial l_i} \qquad (i = 1, 2, \dots 6);$$

ora se i parametri l, λ sono legati da queste relazioni, le equazioni $\sum\lambda_i f_i = 0$, $\sum l_i \varphi_i = 0$ rappresentano una stessa conica come luogo e come inviluppo (n° 8); dunque un punto ed un iperpiano di R_5, che abbiano per corrispondenti in π una stessa conica come inviluppo e come luogo, sono polo e polare rispetto a M_4^3 (*).

Quando nel piano π in luogo della sestupla $\mathbf{S}$ si fissa la sestupla associata $\mathbf{S}'$, una conica qualunque del piano, che prima aveva l'equazione-inviluppo $\sum l_i\varphi_i = 0$, o l'equazione-luogo $\sum\lambda_i f_i = 0$, passa ad avere rispettivamente l'equazione-inviluppo $\sum l'_i\varphi'_i = 0$, o l'equazione luogo $\sum\lambda'_i\varphi'_i = 0$. Mediante le (22) e le (27) si vede che le l' si esprimono linearmente nelle l colle formole

$$(77) \qquad \left\{ \begin{aligned} l'_1 &= l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 \\ l'_2 &= l_1 + l_2 + \varepsilon l_3 + \varepsilon^2 l_4 + \varepsilon^2 l_5 + \varepsilon l_6 \\ l'_3 &= l_1 + \varepsilon l_2 + l_3 + \varepsilon l_4 + \varepsilon^2 l_5 + \varepsilon^2 l_6 \\ l'_4 &= l_1 + \varepsilon^2 l_2 + \varepsilon l_3 + l_4 + \varepsilon l_5 + \varepsilon^2 l_6 \\ l'_5 &= l_1 + \varepsilon^2 l_2 + \varepsilon^2 l_3 + \varepsilon l_4 + l_5 + \varepsilon l_6 \\ l'_6 &= l_1 + \varepsilon l_2 + \varepsilon^2 l_3 + \varepsilon^2 l_4 + \varepsilon l_5 + l_6, \end{aligned} \right.$$

(*) Vedi Segre, l. c.

e le λ' sono espresse linearmente nelle λ colle formole che si deducono dalle precedenti cambiando ε in ε'. L'equazione della varietà M_4^3 ora è (n° 10) $\Theta(l') = 0$ e quella della varietà $\mathbf{M}_4^3$ è $\Theta'(\lambda') = 0$; quindi la sostituzione lineare (77) cambia l'equazione $\Theta'(l) = 0$ in $\Theta(l') = 0$, e l'analoga sostituzione delle λ' nelle λ cambia $\Theta(\lambda) = 0$ in $\Theta'(\lambda') = 0$.

32. — *Il gruppo esteso Γ_{720} di 360 collineazioni e di 360 correlazioni.*

È noto (*) che ad ogni collineazione del piano π corrisponde in R_5 una collineazione, la quale muta in sè la varietà M_4^3; e viceversa ogni collineazione, di R_5, che trasforma questa varietà in sè stessa, dà luogo ad una collineazione del piano π. Similmente ogni correlazione in π determina in R_5 una corrispondenza reciproca, nella quale M_4^3 e $\mathbf{M}_4^3$ si corrispondono; e viceversa ogni corrispondenza reciproca di R_5, nella quale M_4^3 e $\mathbf{M}_4^3$ si corrispondono produce in π una correlazione.

Nel piano π non vi è alcuna collineazione, che cambi l'una nell'altra le due sestuple associate di coniche S *e* S'; perchè, come facilmente si verifica, non esiste in R_5 alcuna collineazione che cambi le f nelle f' ed al tempo stesso le f' nelle f (in ordine qualsivoglia), essendo le f' quelle combinazioni lineari delle f, che sono definite dalle (22).

Per lo contrario *esistono in π 360 correlazioni, che mutano l'una nell'altra le due sestuple associate di coniche.* Infatti si consideri in R_5 la correlazione, di cui le equazioni si ottengono dalle (77) cambiando l'_i in λ_i; per essa l'equazione $\Theta(l') = 0$ si cambia in $\Theta(\lambda) = 0$, quindi (n° 31) la varietà M_4^3 si cambia in $\mathbf{M}_4^3$; segue che se nel piano π alla conica-inviluppo $\sum l_i \varphi_i = 0$ si fa corrispondere la conica luogo $\sum \lambda_i f_i = 0$, essendo λ_i i valori delle l'_i dati dalle (77), si ha nel piano π una correlazione; questa in particolare [come si vede tenendo sempre conto delle (22) e (27)] cambia φ_i in f'_i e φ'_i in f_i; noi la designeremo con L, e scriveremo

$$L = (11')(22')(33')(44')(55')(66')$$

(*) Vedi Segre, l. c.

per denotare che cambia la conica (1) nella (1') e la (1') nella (1), la (2) nella (2') e la (2') nella (2), ecc. Essa, come è chiaro, è una polarità, e moltiplicata per le 360 collineazioni di G_{360} produce 360 correlazioni, che mutano l'una nell'altra le due sestuple di coniche associate, e che aggiunte a G_{360} formano un gruppo più esteso, Γ_{720}, di collineazioni e correlazioni.

Ricordiamo che l'omologia O produce nelle coniche delle due sestuple le permutazioni: (34)(56), (1'2')(3'6'); quindi OL è una correlazione, che produce nelle 12 coniche **S** ed **S'** la permutazione

$$OL \equiv (1\,2'2\,1')(3\,6'5\,5'6\,3'4\,4');$$

perciò OL è una correlazione ciclica di 8° ordine. Il gruppo ciclico formato colle potenze di OL contiene quattro correlazioni di 8° ordine, due collineazioni di 4° ordine ed una omologia. Di siffatti gruppi ciclici di 8° ordine formati con collineazioni e correlazioni, in Γ_{720}, se ne hanno 45, uno per ogni omologia, ed essi non hanno operazioni comuni tranne la identica; dunque in Γ_{720} si hanno $45 \times 4 = 180$ correlazioni di 8° ordine.

Ricordiamo ancora che Z è una collineazione, che produce nelle coniche delle due sestuple le permutazioni (23456), (2'3'4'5'6'); quindi ZL è una correlazione, che produce nelle 12 coniche **S** ed **S'** la seguente permutazione

$$ZL \equiv (1\,1')(2\,3'4\,5'6\,2'3\,4'5\,6');$$

perciò ZL è una correlazione ciclica di 10° ordine; il gruppo ciclico formato colle potenze di ZL contiene il gruppo ciclico di collineazioni di 5° ordine generato da Z, quattro correlazioni di 10° ordine ed una polarità $(ZL)^5 = L$. Di siffatti gruppi ciclici di 10° ordine, formati con collineazioni e correlazioni, in Γ_{720}, se ne hanno 36, quanti sono i gruppi ciclici di collineazioni di 5° ordine in G_{360}, ed essi non hanno operazioni comuni (tranne l'identica); dunque in Γ_{720} vi sono $36 \times 4 = 144$ correlazioni di 10° ordine e 36 polarità; queste sono le 36 polarità, cui abbiamo accennato in fine del n° 19.

Per la presenza in Γ_{720} delle operazioni di 8° e 10° ordine, è

manifesto che questo gruppo non è isomorfo al gruppo simmetrico di permutazioni di 6 cose (*).

33. — I 36 sistemi polari di Γ_{720}, e le 36 coniche $\Lambda_{i,k'}$.

Vogliamo anzitutto formare l'equazione della conica fondamentale per il sistema polare L, che cambia le forme $\varphi'_1, \varphi'_2, \ldots \varphi'_6$ rispettivamente in $f_1, f_2, \ldots f_6$. Osserviamo sulle (56), (58), (58') che mediante L le rette KH', KH'' tangenti comuni alle coniche (1), (1') (n° 18) si cambiano nei rispettivi punti di contatto H', H''; dunque la conica che cerchiamo, e che chiameremo semplicemente conica Λ, appartiene al fascio delle (1)(1') ed ha un'equazione-luogo della forma

$$\lambda f_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6 = 0.$$

Applicando a questa l'operazione L e poi esprimendo le φ' nelle φ, si ha

$$(5+\lambda)\varphi_1 + (\lambda - 1)(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6) = 0,$$

che deve essere l'equazione-inviluppo della conica Λ; ma questa equazione-inviluppo si deduce d'altra parte facendo uso delle (18) ed è

$$\left(\lambda^2 - \frac{5}{2}c'\right)\varphi_1 + \left(-c'\lambda + 1 - \frac{3}{2}c'\right)(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6) = 0;$$

confrontando colla precedente equazione si trae per λ l'equazione di 3° grado

$$\lambda^3 + (c'-1)\lambda^2 + (4c'-1)\lambda - 10c = 0,$$

che ha per radici

$$\lambda_1 = -2c, \qquad \lambda_2 = -(c'+1), \qquad \lambda_3 = 2(1+c).$$

(*) Il gruppo Γ_{720} non fu finora considerato da alcuno. Nella memoria del sig. S. Kantor «Ueber die endlichen Gruppen von Correlationen» (*Crelle's Journal*, Bd. 116, 1896) si trova la estensione, con correlazioni, degli altri gruppi finiti di collineazioni piane.

La radice λ_3 conduce per le (52) alla retta di contatto di (1) e (1') contata come doppia, e però dobbiamo escluderla. Delle altre due radici, quella che fornisce la conica A è la $\lambda_1 = -2c$, come ora passiamo a verificare (*).

Poniamo

$$a_x^2 = a_x'^2 = \frac{1}{3}(-2cf_1 + f_2 + f_3 + f_4 + f_5 + f_6),$$

$$u_a^2 = (aa'u)^2, \qquad A_1 = (aa'a'')^2;$$

il discriminante si calcola col mezzo della (17) ed è

$$\frac{1}{6}A_1 = 1;$$

la forma aggiunta si calcola col mezzo della (18) ed è

$$\frac{1}{2}u_a^2 = \frac{1}{3}(-2c'\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6).$$

Or bene la sostituzione, col determinante $= 1$, che rappresenta il sistema polare rispetto alla conica $a_x^2 = 0$, è

$$x_i = \frac{1}{2}u_a\alpha_i, \qquad (i = 1, 2, 3)$$

per cui una forma b_x^2 diventa

$$\frac{1}{4}b_\alpha b_{\alpha'} u_\alpha u_{\alpha'} = \frac{1}{4}b_\alpha^2 . u_{\alpha'}^2 - \frac{1}{6}A_1(abu)^2.$$

Supposto in primo luogo che la b_x^2 sia la f_1, si ha

$$\begin{aligned}(abu)^2 &= \frac{1}{3}[4c^3\varphi_1 - 2c^2(\tau_{12} + \tau_{13} + \tau_{14} + \tau_{15} + \tau_{16})]\\ &= \frac{1}{3}[4c^3\varphi_1 + c(\varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6)]\end{aligned}$$

(*) La radice λ_3 fornisce la conica, che è coniugata della conica A rispetto alla retta di contatto di (1) e (1').

$$\frac{1}{4}b_a^2 u_{a'}^2 - \frac{1}{6}A_1(abu)^2 = -c' u_a^2 - (abu)^2$$
$$= \frac{1}{3}(c-1)(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6) = \varphi_1'.$$

Supposto poi che la b_x^2 sia la f_2, si ha

$$(abu)^2 = \frac{1}{3}[4c^3\tau_{12} - 2c^2(\varphi_2 + \tau_{23} + \tau_{24} + \tau_{25} + \tau_{26})]$$
$$= \frac{1}{3}[-2c^2\varphi_2 - 2(c+2)\tau_{12} + c(\varphi_1 + \varphi_3 + \varphi_4 + \varphi_5 + \varphi_6)]$$

$$\frac{1}{4}b_a^2 u_{a'}^2 - \frac{1}{6}A_1(abu)^2 = \frac{1}{2}u_a^2 - (abu)^2$$
$$= \frac{1}{3}(c-1)(\varphi_1 + \varphi_2 + \varepsilon^2\varphi_3 + \varepsilon\varphi_4 + \varepsilon\varphi_5 + \varepsilon^2\varphi_6) = \varphi_2'.$$

Trasformando ora colle collineazioni Z^i ($i = 1, 2, 3, 4$), che lasciano inalterata la a_x^2 e cambiano f_2 e φ_2' successivamente in f_3 e φ_3', f_4 e φ_4', f_5 e φ_5', f_6 e φ_6', concludiamo che effettivamente la sostituzione unimodulare, che rappresenta la polarità rispetto alla conica $a_x^2 = 0$, cambia le forme $f_1, f_2, \ldots, f_6$ rispettivamente nelle forme $\varphi_1', \varphi_2', \ldots, \varphi_6'$; segue di qui che la stessa polarità cambia le forme $f_1', f_2', \ldots, f_6'$ rispettivamente nelle forme $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_6$, e però essa è la polarità sopra designata con L.

Nella polarità L i sei triangoli di contatto per le sei coppie di coniche (1) e (1′), (2) e (2′), ..., (6) e (6′) si trasformano ciascuno in sè, ma non si comportano tutti allo stesso modo rispetto alla polarità. Invero, mentre il primo ha, come abbiamo visto, per lati due tangenti e la corda di contatto della conica fondamentale Λ, gli altri cinque sono triangoli autoreciproci rispetto a questa conica. Infatti, per il vertice H' e per il lato opposto KH'' del triangolo di contatto rispetto alla coppia di coniche (1) e (1′), si ha (n° 18)

$$\frac{0}{f_1'} = \frac{1}{f_2'} = \frac{\eta^2}{f_3'} = \frac{\eta^4}{f_4'} = \frac{\eta}{f_5'} = \frac{\eta^3}{f_6'}$$
$$\frac{0}{\varphi_1} = \frac{1}{\varphi_2} = \frac{\eta^3}{\varphi_3} = \frac{\eta}{\varphi_4} = \frac{\eta^4}{\varphi_5} = \frac{\eta^2}{\varphi_6};$$

applicando la collineazione TZS, che cambia le coniche (1) e (1') nelle coniche (2) e (2'), si deduce che per un vertice H' ed il lato opposto KH'' del triangolo di contatto rispetto alle coniche (2) e (2') si ha

$$\frac{1}{f'_1}=\frac{0}{f'_2}=\frac{\varepsilon\eta^4}{f'_3}=\frac{\varepsilon^2\eta^3}{f'_4}=\frac{\varepsilon^2\eta^2}{f'_5}=\frac{\varepsilon\eta}{f'_6}$$

$$\frac{1}{\varphi_1}=\frac{0}{\varphi_2}=\frac{\varepsilon\eta^4}{\varphi_3}=\frac{\varepsilon^2\eta^3}{\varphi_4}=\frac{\varepsilon^2\eta^2}{\varphi_5}=\frac{\varepsilon\eta}{\varphi_6},$$

donde è manifesto che il vertice H' ed il lato opposto KH'' del triangolo di contatto rispetto alle due coniche (2) e (2') si corrispondono nel sistema polare L, dunque il detto triangolo è autoreciproco in questo sistema polare.

Osserviamo che, se C è una collineazione del gruppo G_{360}, che trasforma le coniche (1) e (1') nelle coniche (i) e (k'), CLC^{-1} è una polarità di Γ_{720}; questa polarità ha per conica fondamentale una conica bitangente alle coniche (i) e (k'), la quale si ottiene applicando la collineazione C alla conica Λ; denoteremo con $\Lambda_{i,k'}$ questa conica e con $L_{i,k'}$ il suo sistema polare:

$$C\Lambda = \Lambda_{i,k'}, \qquad CLC^{-1} = L_{i,k'};$$

e però in particolare sarà

$$\Lambda = \Lambda_{1,1'}, \qquad L = L_{1,1'}.$$

In G_{360} vi sono (n° 18) dieci collineazioni, che portano un punto K in ogni altro punto K, e quindi vi sono dieci collineazioni, che portano le coniche (1) e (1') rispettivamente nelle coniche (i) e (k'), qualunque siano (i) e (k'); segue che, corrispondentemente alle 36 combinazioni (i)(k') d'una conica della sestupla **S** con una conica della sestupla **S'**, si hanno in Γ_{720} 36 sistemi polari $L_{i,k'}$, ciascuno dei quali si può ottenere trasformando il sistema polare L con 10 collineazioni.

Alle coniche della sestupla **S'** prese nell'ordine [1' 2' 3' 4' 5' 6'] corrispondono per ogni $L_{i,k'}$ le coniche della sestupla **S** nell'ordine indi-

cato dal seguente quadro:

$$
(78)\quad \begin{cases}
L_{1,1'} \equiv [123456] & L_{1,2'} \equiv [215364] & L_{1,3'} \equiv [351642] \\
L_{1,4'} \equiv [436125] & L_{1,5'} \equiv [564213] & L_{1,6'} \equiv [642531] \\
L_{2,1'} \equiv [214635] & L_{2,2'} \equiv [126543] & L_{2,3'} \equiv [462351] \\
L_{2,4'} \equiv [653214] & L_{2,5'} \equiv [345126] & L_{2,6'} \equiv [531462] \\
L_{3,1'} \equiv [361524] & L_{3,2'} \equiv [634152] & L_{3,3'} \equiv [143265] \\
L_{3,4'} \equiv [512346] & L_{3,5'} \equiv [256431] & L_{3,6'} \equiv [425613] \\
L_{4,1'} \equiv [452163] & L_{4,2'} \equiv [543621] & L_{4,3'} \equiv [234516] \\
L_{4,4'} \equiv [165432] & L_{4,5'} \equiv [621345] & L_{4,6'} \equiv [316254] \\
L_{5,1'} \equiv [546312] & L_{5,2'} \equiv [451236] & L_{5,3'} \equiv [615423] \\
L_{5,4'} \equiv [324561] & L_{5,5'} \equiv [132654] & L_{5,6'} \equiv [263145] \\
L_{6,1'} \equiv [635241] & L_{6,2'} \equiv [362415] & L_{6,3'} \equiv [526134] \\
L_{6,4'} \equiv [241653] & L_{6,5'} \equiv [413562] & L_{6,6'} \equiv [154326].
\end{cases}
$$

Le equazioni delle coniche $A_{i,k'}$, fondamentali nei sistemi polari $L_{i,k}$, si deducono applicando le collineazioni di G_{360} alla equazione $a_x^2 = 0$ sopra trovata della conica A; i loro primi membri, ridotti ad avere il discriminante $= 1$, si possono scrivere nella forma:

$$
(79)\quad \begin{cases}
A_{1,1'} = af_1 + bf'_1, & A_{1,2'} = af_1 + bf'_2, & A_{1,3'} = af_1 + bf'_3, \\
A_{1,4'} = af_1 + bf'_4, & A_{1,5'} = af_1 + bf'_5, & A_{1,6'} = af_1 + bf'_6, \\
A_{2,1'} = af_2 + bf'_1, & A_{2,2'} = af_2 + bf'_2, & A_{2,3'} = a\varepsilon f_2 + bf'_3, \\
A_{2,4'} = a\varepsilon^2 f_2 + bf'_4, & A_{2,5'} = a\varepsilon^2 f_2 + bf'_5, & A_{2,6'} = a\varepsilon f_2 + bf'_6, \text{ ecc.}
\end{cases}
$$

dove si è posto, per brevità di scrittura,

$$a = \frac{2}{3}(c' - 1), \qquad b = \frac{2}{3}(c - 1).$$

34. — *Le coppie di coniche* Λ *e le coppie di polarità* L.

Colle 36 coniche $\Lambda_{i,k'}$ si possono formare $\frac{36 \times 35}{2} = 630$ coppie. Or bene queste 630 coppie si distribuiscono in quattro classi tali che le due coniche di una coppia qualunque si possono trasformare nelle due coniche di una coppia della stessa classe, con collineazioni o correlazioni di Γ_{720}, e due coppie appartenenti a classi diverse non sono trasformabili l'una nell'altra.

Invero consideriamo in primo luogo due coniche $\Lambda_{i,h'}$, $\Lambda_{i,k'}$ che hanno lo stesso primo indice i ($h' \neq k'$); il numero di tali coppie è 90. Cominciamo dall'applicare una delle collineazioni di G_{360}, che cambia le coniche (h'), (k') nelle coniche $(1')$, $(2')$ e supponiamo che muti la conica (i) nella conica (α); poi ricordiamo (n° 23) che il sottogruppo tetraedrico, che lascia ferme le due coniche $(1')$ e $(2')$, produce un gruppo transitivo di permutazioui nella sestupla S; quindi in quel sottogruppo vi è almeno una (precisamente ve ne sono due) collineazione, che cambia la conica (α) nella conica (1); segue che con due collineazioni di G_{360} si può mutare una coppia qualsiasi $\Lambda_{i,h'}$, $\Lambda_{i,k'}$ nella coppia $\Lambda_{1,1'}$, $\Lambda_{1,2'}$. Similmente si vede che due coniche $\Lambda_{i,h'}$, $\Lambda_{k,h'}$, che hanno lo stesso secondo indice, si possono con collineazioni di G_{360} mutare nella coppia $\Lambda_{1,1'}$, $\Lambda_{2,1'}$ e questa poi per mezzo della polarità L si cambia nella coppia $\Lambda_{1,1'}$, $\Lambda_{1,2'}$; il numero delle coppie $\Lambda_{i,h'}$, $\Lambda_{k,h'}$ è 90. Dunque *abbiamo una prima classe di 180 coppie di coniche* Λ, *che con collineazioni o correlazioni di* Γ_{720} *si possono mutare nella coppia* $\Lambda_{1,1'}$, $\Lambda_{1,2'}$.

Passiamo ora a considerare le coppie di coniche $\Lambda_{i,h'}$, $\Lambda_{k,l'}$, che non hanno uguali nè primi nè secondi indici. Applichiamo una qualunque delle collineazioni di G_{360}, che muti le coniche (h'), (l') nelle coniche $(1')$, $(2')$ e siamo ridotti a considerare le coppie di coniche $\Lambda_{\alpha,1'}$, $\Lambda_{\beta,2'}$, essendo $\alpha\,\beta$ le disposizioni binarie degli indici 1, 2, … 6. Osserviamo poi che nel sottogruppo tetraedrico (n° 23), che lascia

ferme le coniche (1'), (2'), esistono collineazioni che mutano le coniche (α) e (β): *a*) nelle coniche (1) e (2), ovvero *b*): nelle coniche (1) e (3), ovvero *c*): nelle coniche (1) e (4), rispettivamente secondo che $\alpha\beta$ è una delle sei disposizioni

a) 12, 21, 36, 63, 45, 54,

o una delle dodici disposizioni

b) 13, 16, 23, 26, 34, 35, 41, 42, 51, 52, 64, 65,

o una delle dodici disposizioni

c) 14, 15, 24, 25, 31, 32, 43, 46, 53, 56, 61, 62.

Corrispondentemente alle 15 combinazioni binarie $h'l'$ troviamo dunque: *a*) *una seconda classe di* $15 \times 6 = 90$ *coppie* $A_{i,h'}$, $A_{k,l'}$, *le quali con collineazioni di* G_{360} *si possono cambiare nella coppia* $A_{1,1'}$, $A_{2,2'}$; *b*) *una terza classe di* $15 \times 12 = 180$ *coppie* $A_{i,h'}$, $A_{k,l'}$ *trasformabili nella coppia* $A_{1,1'}$, $A_{3,2'}$; *c*) *una quarta classe di* $15 \times 12 = 180$ *coppie* $A_{i,h'}$, $A_{k,l'}$ *trasformabili nella coppia* $A_{1,1'}$, $A_{4,2'}$.

Per dimostrare che due coppie di coniche A appartenenti a classi diverse non sono trasformabili l'una nell'altra, basta considerare le quattro coppie $A_{1,1'}$, $A_{1,2'}$; $A_{1,1'}$, $A_{2,2'}$; $A_{1,1'}$, $A_{3,2'}$; $A_{1,1'}$, $A_{4,2'}$ e calcolare per ognuna gli invarianti assoluti; si trova che questi hanno valori diversi da coppia o coppia, e precisamente si ha

$$\frac{A_1\Theta_2}{3\Theta_1^2} = \frac{A_2\Theta_1}{3\Theta_2^2} = 1 \qquad \text{per} \quad A_{1,1'},\ A_{1,2'}$$

$$= -1 \qquad \text{per} \quad A_{1,1'},\ A_{2,2'}$$

$$= \omega' \qquad \text{per} \quad A_{1,1'},\ A_{3,2'}$$

$$= \omega \qquad \text{per} \quad A_{1,1'},\ A_{4,2'}.$$

Una notevole proprietà hanno le coppie di coniche A della se-

conda classe; le due coniche di ciascuna di queste coppie sono *coniugate* fra loro, cioè sono l'una polare reciproca di sè rispetto all'altra. Infatti si considerino le due coniche $\Lambda_{1,1'}$ e $\Lambda_{2,2'}$; nel sistema polare L, di cui $\Lambda_{1,1'}$ è conica fondamentale, le due coniche (2), (2') si corrispondono tra loro e quindi la conica $\Lambda_{2,2'}$ corrisponde a sè stessa. Segue che *colle* 36 *coniche* $\Lambda_{i,k'}$ *si possono formare* 90 *coppie di coniche coniugate, e che ogni conica* Λ *è coniugata (e quindi bitangente) ad altre cinque coniche* Λ.

Diremo che due polarità $L_{i,k'}$, $L_{l,r'}$ formano una coppia di r^{ma} classe ($r = 1, 2, 3, 4$), se le rispettive coniche fondamentali $\Lambda_{i,k'}$, $\Lambda_{l,r'}$ formano una coppia di r^{ma} classe. Perciò, se $\alpha = \beta$ ovvero se $\alpha' = \beta'$, $L_{\alpha,\alpha'}$ e $L_{\beta,\beta'}$ sono una coppia di 1ª classe; se, essendo $\alpha \neq \beta$, $\alpha' \neq \beta'$, esiste una collineazione che cambia le coniche (α) e (α') nelle coniche (β) e (β'), $L_{\alpha,\alpha'}$ e $L_{\beta,\beta'}$ sono una coppia di seconda classe; altrimenti, sono una coppia di 3ª o 4ª classe.

Due polarità, che formano una coppia di 1ª classe, dànno per prodotto una collineazione di 4° ordine. Due polarità, che formano una coppia di 2ª classe, dànno per prodotto un'omologia. Due polarità, che formano una coppia di 3ª o 4ª classe, dànno per prodotto una collineazione di 5° ordine.

A dimostrare queste proposizioni, cominciamo dall'osservare che, se L, L' e L'', L''' sono due coppie di polarità della stessa classe, esiste una collineazione C tale che

$$L'' = C^{-1} L C \qquad \text{e} \qquad L''' = C^{-1} L' C;$$

quindi

$$L'' L''' = C^{-1} L L' C,$$

e perciò i prodotti $L L'$ e $L'' L'''$ sono collineazioni dello stesso ordine. Ciò posto, basta esaminare i prodotti $L_{1,2'} L_{1,1'}$, $L_{2,2'} L_{1,1'}$, $L_{3,2'} L_{1,1'}$, $L_{4,2'} L_{1,1'}$, che, eseguiti col tener conto del quadro (78), producono nelle coniche della sestupla **S** le permutazioni seguenti

$$L_{1,2'} L_{2,1'} \equiv (12)(3564), \qquad L_{2,2'} L_{1,1'} \equiv (36)(45),$$

$$L_{3,2'} L_{1,1'} \equiv (16234), \qquad L_{4,2'} L_{1,1'} \equiv (15246).$$

Nessuna delle collineazioni di 3° ordine di G_{360} è prodotto di due polarità di Γ_{720}.

Ogni omologia di G_{360} nasce da due prodotti diversi, ciascuno di due polarità, che formano una coppia di 2ª classe; e precisamente, se $L_{\alpha,\alpha'}$, $L_{\beta,\beta'}$ è una coppia di 2ª classe, anche $L_{\beta,\alpha'}$, $L_{\alpha,\beta'}$ è una coppia di 2ª classe, e si ha

$$(80) \qquad L_{\alpha,\alpha'} L_{\beta,\beta'} = L_{\beta,\alpha'} L_{\alpha,\beta'}.$$

Infatti, se $L_{\alpha,\alpha'}$, $L_{\beta,\beta'}$ è una coppia di 2ª classe, esiste in G_{360} una collineazione C che cambia (1) in (α), (2) in (β), (1′) in (α'), (2′) in (β'); per cui si ha

$$C^{-1} L_{1,1'} C = L_{\alpha,\alpha'}, \quad C^{-1} L_{2,2'} C = L_{\beta,\beta'}, \quad C^{-1} L_{1,1'} L_{2,2'} C = L_{\alpha,\alpha'} L_{\beta,\beta'},$$

$$C^{-1} L_{2,1'} C = L_{\beta,\alpha'}, \quad C^{-1} L_{1,2'} C = L_{\alpha,\beta'}, \quad C^{-1} L_{2,1'} L_{1,2'} C = L_{\beta,\alpha'} L_{\alpha,\beta'},$$

inoltre si ha

$$L_{1,1'} L_{2,2'} = L_{2,1'} L_{1,2'} \equiv (36)(45).$$

Ogni collineazione di 4° ordine di G_{360} nasce da quattro prodotti diversi, ciascuno di due polarità, che formano una coppia di 1ª classe.

Infatti si ha, come è facile verificare tenendo conto del quadro (78),

$$L_{1,1'} L_{2,1'} = L_{1,2'} L_{1,1'} = L_{2,2'} L_{1,2'} = L_{2,1'} L_{2,2'} \equiv (12)(3564),$$

e di qui si deduce generalmente che:

$$(81) \qquad L_{\alpha,\alpha'} L_{\beta,\alpha'} = L_{\alpha,\beta'} L_{\alpha,\alpha'} = L_{\beta,\beta'} L_{\alpha,\beta'} = L_{\beta,\alpha'} L_{\beta,\beta'},$$

dove s'intende che (β') sia la conica, in cui si muta la (2′), quando si applica una collineazione di G_{360}, che muta le coniche (1), (2), (1′) rispettivamente in (α), (β), (α'), di guisa che $L_{\alpha,\alpha'}$, $L_{\beta,\beta'}$ è una coppia di seconda classe.

La relazione (80) è, come si vede subito, conseguenza delle (81).

Ogni collineazione di 5° ordine di G_{360} nasce da cinque prodotti diversi, ciascuno di due polarità, che formano una coppia di 3ª o 4ª classe.

Infatti sia $L_{\alpha,\alpha'}$, $L_{\beta,\beta'}$ una coppia di 3ª o 4ª classe; siano inoltre: $L_{\gamma,\gamma'}$ la trasformata di $L_{\alpha,\alpha'}$ mediante $L_{\beta,\beta'}$; $L_{\delta,\delta'}$ la trasformata di $L_{\beta,\beta'}$ mediante $L_{\gamma,\gamma'}$; $L_{\varepsilon,\varepsilon'}$ la trasformata di $L_{\gamma,\gamma'}$ mediante $L_{\delta,\delta'}$. Sarà $L_{\alpha,\alpha'}$ la trasformata di $L_{\delta,\delta'}$ mediante $L_{\varepsilon,\varepsilon'}$ e si avrà

$$(82)\quad L_{\alpha,\alpha'}L_{\beta,\beta'} = L_{\beta,\beta'}L_{\gamma,\gamma'} = L_{\gamma,\gamma'}L_{\delta,\delta'} = L_{\delta,\delta'}L_{\varepsilon,\varepsilon'} = L_{\varepsilon,\varepsilon'}L_{\alpha,\alpha'};$$

perchè la collineazione rappresentata dal prodotto $L_{\alpha,\alpha'}L_{\beta,\beta'}$ è di quint'ordine. Questa collineazione poi produce nelle coniche delle due sestuple **S**, **S'** le permutazioni

$$(\alpha\delta\beta\varepsilon\gamma), \qquad (\alpha'\delta'\beta'\varepsilon'\gamma').$$

A dimostrar ciò in generale basta farne la verificazione per la sola coppia di 3ª classe $L_{1,1'}L_{3,2'}$ e per la sola coppia di 4ª classe $L_{1,1'}L_{4,2'}$; la verificazione si fa tenendo conto del quadro (78) e ponendo nel primo caso

$$\alpha = 1, \quad \beta = 3, \quad \gamma = 6, \quad \delta = 4, \quad \varepsilon = 2,$$

$$\alpha' = 1', \quad \beta' = 2', \quad \gamma' = 4', \quad \delta' = 6', \quad \varepsilon' = 3',$$

e nel secondo caso

$$\alpha = 1, \quad \beta = 4, \quad \gamma = 5, \quad \delta = 6, \quad \varepsilon = 2,$$

$$\alpha' = 1', \quad \beta' = 2', \quad \gamma' = 6', \quad \delta' = 5', \quad \varepsilon' = 4'.$$

Essendo adunque $L_{\alpha,\alpha'}L_{\beta,\beta'} = (\alpha\delta\beta\varepsilon\gamma)$, si deduce, anche in virtù delle (82):

$$L_{\alpha,\alpha'} = (\alpha\delta\beta\varepsilon\gamma)L_{\beta,\beta'} = (\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)L_{\gamma,\gamma'} = (\alpha\varepsilon\delta\gamma\beta)L_{\delta,\delta'} = (\alpha\gamma\varepsilon\beta\delta)L_{\varepsilon,\varepsilon'};$$

di qui si vede facilmente che nel sistema polare $L_{\alpha,\alpha'}$ alle coniche (α'), (β'), (γ'), (δ'), (ε') corrispondono rispettivamente le coniche (α), (ε), (δ), (γ), (β), quindi alla rimanente conica (ζ') di **S'** corrisponde la

rimanente conica (ζ) di S. Similmente si dimostra che queste due coniche (ζ), (ζ') si corrispondono anche nelle polarità $L_{\beta,\beta'}$, $L_{\gamma,\gamma'}$, $L_{\delta,\delta'}$, $L_{\varepsilon,\varepsilon'}$; dunque per tutte cinque le polarità considerate la conica $\Lambda_{\zeta,\zeta'}$ si trasforma in sè. Segue che le cinque coniche $\Lambda_{\alpha,\alpha'}$, $\Lambda_{\beta,\beta'}$, $\Lambda_{\gamma,\gamma'}$, $\Lambda_{\delta,\delta'}$, $\Lambda_{\varepsilon,\varepsilon'}$ sono le cinque coniche Λ coniugate alla $\Lambda_{\zeta,\zeta'}$ (*); e però le cinque polarità $L_{\alpha,\alpha'}$, $L_{\beta,\beta'}$, $L_{\gamma,\gamma'}$, $L_{\delta,\delta'}$, $L_{\varepsilon,\varepsilon'}$ accoppiate con $L_{\zeta,\zeta'}$ dànno coppie di 2ª classe; d'altra parte quelle cinque polarità accoppiate tra loro dànno coppie di 3ª o 4ª classe, perchè i loro prodotti sono le collineazioni di 5° ordine del gruppo ciclico generato da $Z_{(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)}$. Dunque, data una polarità, se si considerano quelle cinque che con essa formano coppie di 2ª classe, queste cinque prese due a due dànno sempre luogo a coppie di 3ª o 4ª classe; per conseguenza *quando si considerano tre o più polarità, non tutte le coppie, che con esse si possono formare, possono essere della 2ª classe.*

Osserviamo ancora che, fissata una polarità $L_{\zeta,\zeta'}$, ve ne sono 10 che con esse formano una coppia di 1ª classe, e sono le altre cinque che hanno per primo indice ζ, e le altre cinque che hanno per secondo indice ζ'; infine, fissata una polarità, ve ne sono $36 - 10 - 5 - 1 = 20$ che con quella formano una coppia di 3ª o 4ª classe.

Tre polarità, che diano luogo ad una coppia di 1ª e ad una di 3ª o 4ª classe, come ad es. $L_{1,1'}$, $L_{1,2'}$, $L_{2,1'}$, *generano tutto il gruppo* Γ_{720}, perchè il gruppo generato da quelle tre polarità contiene una collineazione di 4° ordine e una di 5° ordine e l'unico sottogruppo, che contenga collineazioni di 4° e di 5° ordine, è G_{360}.

35. — *Sottogruppi di* Γ_{720}.

I sottogruppi di Γ_{720}, costituiti di sole collineazioni, sono G_{360} ed sottogruppi di G_{360} (n° 28).

Ogni gruppo finito di collineazioni e correlazioni ha quelle e queste in ugual numero. Infatti siano c_1, c_2, ... c_n le collineazioni e γ una correlazione del gruppo; è chiaro che $c_1\gamma$, $c_2\gamma$, ..., $c_n\gamma$ sono correlazioni distinte; queste inoltre sono tutte le correlazioni del gruppo,

(*) Le corde di contatto sono le cinque rette u concorrenti nel punto $K_{(\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon)}$.

perchè, se σ è una qualunque di queste, $\sigma\gamma^{-1}$ è una collineazione c_i del gruppo, donde $\sigma = c_i\gamma$.

Consideriamo ora un sottogruppo Γ di Γ_{720}, che contenga correlazioni e collineazioni; tutte queste collineazioni formano un sottogruppo G di G_{360}; e noi diremo che quel sottogruppo Γ è l'*esteso* di questo sottogruppo G.

L'esteso di G_{360} è Γ_{720}.

Il gruppo identico ha 36 gruppi estesi, Γ_2, ognuno dei quali è costituito dalla collineazione identica e da una delle 36 polarità $L_{\lambda\mu'}$.

Una coppia di polarità di 2ª classe genera un gruppo, Γ_4, composto dell'operazione identica, delle due polarità e dell'omologia prodotto di queste. Ogni gruppo, G_2, formato dalla operazione identica e da un'omologia ha due gruppi estesi Γ_4, perchè un'omologia si può in due modi diversi ottenere come prodotto di due polarità (n° 34); i sottogruppi Γ_4 sono dunque 90.

I gruppi ciclici di 3° ordine, G_3 e G'_3, non hanno gruppi estesi, perchè in Γ_{720} non esistono correlazioni di 6° ordine, e perchè due polarità non dànno mai per prodotto una collineazione di 3° ordine.

Per lo contrario i gruppi ciclici G_4, G_5 hanno ognuno due gruppi estesi.

In primo luogo ogni gruppo ciclico G_4, o G_5, ha per esteso il gruppo ciclico Γ_8, o Γ_{10}, generato dalle potenze di una correlazione di 8°, o di 10°, ordine di Γ_{720} (n° 32).

In secondo luogo osserviamo (n° 34) che una coppia di polarità di 1ª classe genera un gruppo, $\overline{\Gamma}_8$, costituito da quattro polarità

$$L_{\alpha,\alpha'},\quad L_{\beta,\alpha'},\quad L_{\beta,\beta'} = L_{\beta,\alpha'} L_{\alpha,\alpha'} L_{\beta,\alpha'},\quad L_{\alpha,\beta'} = L_{\alpha,\alpha'} L_{\beta,\alpha'} L_{\alpha,\alpha'},$$

e da un gruppo ciclico G_4

$$1,\quad L_{\alpha,\alpha'} L_{\beta,\alpha'} = Y,\qquad L_{\alpha,\alpha'} L_{\beta,\beta'} = Y^2,\qquad L_{\alpha,\alpha'} L_{\alpha,\beta'} = Y^3.$$

Osserviamo inoltre (n° 34) che una coppia di polarità di 3ª o 4ª classe genera un gruppo, $\overline{\Gamma}_{10}$, costituito di cinque polarità

$$L_{\alpha,\alpha'},\quad L_{\beta,\beta'},\quad L_{\gamma,\gamma'},\quad L_{\delta,\delta'},\quad L_{\varepsilon,\varepsilon'}$$

e di un gruppo ciclico di collineazioni di 5° ordine

$$1,\ L_{\alpha,\alpha'}L_{\beta,\beta'}=Z,\ L_{\alpha,\alpha'}L_{\gamma,\gamma'}=Z^2,\ L_{\alpha,\alpha'}L_{\delta,\delta'}=Z^3,\ L_{\alpha,\alpha'}L_{\varepsilon,\varepsilon'}=Z^4.$$

Concludiamo che ogni gruppo ciclico, G_4, ha un gruppo esteso, $\overline{\Gamma}_8$, che non è più un gruppo ciclico e contiene quattro polarità; e che ogni gruppo ciclico, G_5, ha un gruppo esteso, $\overline{\Gamma}_{10}$, che non è più un gruppo ciclico e contiene cinque polarità (*). In Γ_{720} si hanno 45 sottogruppi $\overline{\Gamma}_8$ e 36 sottogruppi $\overline{\Gamma}_{10}$.

I sottogruppi quadrinomii ed i sottogruppi diedri G_6 e G'_6 di G_{360} non hanno gruppi estesi. Infatti, dovendosi escludere le correlazioni di 8° o 10° ordine, perchè nei sottogruppi considerati non esistono collineazioni di 4° o 5° ordine, il gruppo esteso non potrebbe contenere altre correlazioni che polarità; ma queste, in numero di 4, o 6, prese due a due, darebbero necessariamente luogo a coppie di 1ª, o 3ª, o 4ª classe e quindi coi loro prodotti introdurrebbero delle collineazioni di 4° o 5° ordine, ciò che non deve accadere.

Un sottogruppo Γ_{16}, che sia gruppo esteso di un gruppo diedro G_8, non può contenere correlazioni di 10° ordine; non può inoltre contenere più d'un gruppo ciclico Γ_8 di 8° ordine, che è l'esteso dell'unico gruppo ciclico G_4 contenuto in G_8; dunque contiene almeno quattro polarità. Queste poi non possono dar luogo a coppie di 3ª o 4ª classe, perchè in G_8 non vi sono collineazioni di 5° ordine; d'altra parte non possono fornire soltanto coppie di 2ª classe; dunque tra le coppie, che si possono formare con quelle quattro polarità, ve ne è certo qualcuna di 1ª classe. Ora una coppia di polarità di 1ª classe genera, come si è visto sopra, un gruppo $\overline{\Gamma}_8$, che contiene un gruppo ciclico G_4 di collineazioni; dunque nel gruppo Γ_{16} è contenuto quel gruppo $\overline{\Gamma}_8$, che è esteso del gruppo ciclico G_4 contenuto in G_8. Segue che, se il gruppo Γ_{16} esiste, per ottenerlo basta aggiungere a G_8 una delle polarità, che entrano nel gruppo $\overline{\Gamma}_8$ considerato. A dimostrare ora l'esistenza del Γ_{16}, esaminiamo in particolare il gruppo G_8 gene-

(*) Queste cinque polarità, prese due a due, dànno cinque coppie di 3ª classe e cinque coppie di 4ª classe.

rato da

$$O = O_{(34)(56)} = O_{(1'2')(3'6')} \quad \text{e} \quad Y = Y_{(3465)} = Y_{(3'5'6'4')}.$$

Essendo $L_{2,2'} L_{1,1'} = Y$, aggiungiamo a G_8 la polarità $L_{1,1'} = L$; per dimostrare che le collineazioni di G_8 e le correlazioni che nascono dai loro prodotti per L formano gruppo, basta osservare; 1° che si ha

$$L\,O = O_{(12)(36)}\,L = O_{(3'4')(5'6')}\,L \equiv (1\,1'\,2\,2')(3\,4'\,4\,3'\,6\,5'\,5\,6')$$

$$L\,Y = Y_{(3564)}\,L = Y_{(3'4'6'5')}\,L \equiv (1\,2')(2\,1')(3\,4')(4\,6')(5\,3')(6\,5')$$

2° che $O_{(12)(36)} = Y\,O$, $Y_{(3564)} = Y^3$ sono collineazioni di G_8. Osserviamo poi che il gruppo ciclico Γ_8, generato dalla correlazione di 8° ordine $L\,O$, contiene il gruppo ciclico G_4 generato da Y; e così concludiamo ancora che *il gruppo esteso* Γ_{16} *di un gruppo* G_8 *contiene entrambi i gruppi* Γ_8, $\overline{\Gamma}_8$ *estesi del gruppo ciclico* G_4 *contenuto in* G_8. In Γ_{720} si hanno 45 sottogruppi Γ_{16}.

Un sottogruppo Γ_{20}, che sia gruppo esteso di un gruppo diedro G_{10}, non può contenere correlazioni di 8° ordine; non può inoltre contenere più d'un gruppo ciclico Γ_{10} di 10° ordine, che è l'esteso dell'unico gruppo ciclico G_5 contenuto in G_{10}; dunque contiene almeno cinque polarità. Queste poi non possono dar luogo a coppie di 1ª classe, perchè in G_{10} non esistono collineazioni di 4° ordine; d'altra parte non possono fornire soltanto coppie di 2ª classe; dunque tra le coppie, che si possono formare con quelle cinque polarità, ve ne è certo qualcuna di 3ª o 4ª classe. Ora una coppia di polarità di 3ª o 4ª classe genera, come si è visto sopra, un gruppo $\overline{\Gamma}_{10}$, che contiene un gruppo ciclico G_5 di collineazioni; dunque nel gruppo Γ_{20} è contenuto quel gruppo $\overline{\Gamma}_{10}$, che è esteso del gruppo ciclico G_5 contenuto in G_{10}. Segue che, se il gruppo Γ_{20} esiste, per ottenerlo basta aggiungere a G_{10} una delle polarità che entrano nel gruppo $\overline{\Gamma}_{10}$ considerato.—A dimostrare l'esistenza del Γ_{20} esaminiamo in particolare il gruppo G_{10} generato da

$$O' = O_{(36)(45)} = O_{(3'6')(4'5')} \quad \text{e} \quad Z = Z_{(23456)} = Z_{(2'3'4'5'6')}.$$

Essendo $L_{3,3'} L_{5,5'} = Z$, aggiungiamo a G_{10}, la polarità $L_{3,3'}$. A dimostrare che le collineazioni di G_{10} e le correlazioni, che nascono

dai loro prodotti per $L_{3,3'}$, formano gruppo, basta osservare che si ha

$$L_{3,3'}O'' = ZO''L_{3,3'} \equiv (11')(24'63'52'46'35')$$

$$L_{3,3'}Z = ZL_{3,3'} \equiv (11')(23')(32')(46')(55')(64').$$

Osserviamo poi che la correlazione di 10° ordine $L_{3,3'}O''$ genera un gruppo ciclico Γ_{10}, il quale contiene il gruppo ciclico G_5 generato da Z; e così concludiamo ancora che *il gruppo esteso* Γ_{20} *di un gruppo* G_{10} *contiene entrambi i gruppi* Γ_{10}, $\overline{\Gamma}_{10}$ *estesi del gruppo ciclico* G_5 *contenuto in* G_{10}. In Γ_{720} si hanno 36 sottogruppi Γ_{20}.

I gruppi Hessiani G_9, G_{18} ed i gruppi tetraedrici G_{12}, G'_{12} non hanno gruppi estesi. Infatti, se questi esistessero, non potendo contenere correlazioni di 8° e 10° ordine, dovrebbero contenere polarità. Ma ciò non accade, perchè i prodotti di più polarità due a due non possono mai dare collineazioni di 3° ordine, nè dar sempre omologie se il loro numero è maggiore di due.

Se Γ_{72} è un gruppo esteso di un gruppo Hessiano G_{36}, non può contenere correlazioni di 10° ordine; nè può contenere tutte 36 le polarità, perchè queste generano tutto il gruppo Γ_{720}; conterrà dunque correlazioni di 8° ordine. Il gruppo ciclico Γ_8, generato da una di queste, contiene un gruppo ciclico G_4 di G_{36}; trasformandolo colle 9 omologie di G_{36}, si ottengono 9 diversi gruppi ciclici Γ_8, perchè si vede facilmente (n° 22) che un gruppo ciclico G_4 di G_{36}, trasformato colle dette 9 omologie, produce 9 diversi gruppi ciclici G_4, che sono tutti i gruppi ciclici G_4 contenuti in G_{36}. In quei 9 gruppi ciclici Γ_8 si trovano $9 \times 4 = 36$ correlazioni diverse di 8° ordine; dunque il Γ_{72} deve contenere 36 correlazioni di 8° ordine. Segue che, se il gruppo Γ_{72} esiste, per ottenerlo basta aggiungere a G_{36} una qualunque delle correlazioni di 8° ordine, che hanno per quadrato una collineazione di 4° ordine di G_{36}. — A dimostrare l'esistenza del Γ_{72}, esaminiamo in particolare il gruppo G_{36} generato da (n° 22) (*):

$$s = S_{(145)} = S_{(1'6'3')(2'4'5')} \quad \text{e} \quad Y = Y_{(3465)} = Y_{(3'5'6'4')}.$$

(*) A generare un gruppo G_{36} bastano due collineazioni, ad es. $S_{(\alpha\beta\gamma)}$, $Y_{(\alpha\delta\beta\varepsilon)}$; la terza $S_{(\delta\varepsilon\zeta)}$, indicata alla fine del n° 22, è la trasformata della prima mediante la seconda.

Essendo

$$\theta = L\,O \equiv (1\,1'\,2\,2')(3\,4'\,4\,3'\,6\,5'\,5\,6')$$

una correlazione di 8° ordine, che ha per quadrato $\theta^2 = Y$, aggiungiamola al gruppo G_{36} considerato. A dimostrare che le collineazioni di G_{36} e le correlazioni, che nascono dai loro prodotti per θ, formano gruppo, basta osservare che si ha

$$\theta s = s\,Y^3 s\,Y.\theta, \qquad \theta\,Y = Y\theta.$$

In Γ_{720} si hanno 10 gruppi Γ_{72} (*).

I gruppi ottaedrici G_{24}, G'_{24} non hanno gruppi estesi. Infatti in un gruppo Γ_{48} esteso di un G_{24}, se esistesse, le 24 correlazioni non potrebbero essere tutte polarità; perchè, fissata una polarità, ve ne sono soltanto altre 10 che dànno con essa coppie di 1ª classe ed altre 5 che dànno con essa coppie di 2ª classe, e quindi con 24 polarità si potrebbero formare coppie di 3ª o 4ª classe, le quali coi loro prodotti porterebbero collineazioni di 5° ordine e di queste non ve ne è alcuna in G_{24}. Dovendo altresì escludere le correlazioni di 10° ordine, segue che in Γ_{48} dovrebbero esservi correlazioni di 8° ordine. Il gruppo ciclico Γ_8, generato da una di queste, contiene un gruppo ciclico G_4 di G_{24}; e siccome in G_{24} vi sono tre gruppi ciclici simili G_4, così in Γ_{48} vi sarebbero tre gruppi ciclici Γ_8. Segue che, se il Γ_{48} esistesse, conterrebbe 12 correlazioni di 8° ordine, e per ottenerlo basterebbe aggiungere a G_{24} una qualunque delle correlazioni di 8° ordine, che hanno per quadrato una collineazione di 4° ordine di G_{24}. A dimostrare che il Γ_{48} non esiste, esaminiamo in particolare il gruppo G_{24} generato da (n° 24):

$$S = S_{(456)} = S_{(1'4'6')(2'5'3')} \quad \text{e} \quad Y = Y_{(3465)} = Y_{(3'5'6'4')}.$$

(*) È notevole il fatto che, considerando il gruppo G_{36} come divisore del gruppo Hessiano, G_{216}, di 216 collineazioni, ed estendendolo colle correlazioni che servono ad estendere il G_{216}, come ha indicato il sig. S. Kantor (l. c.), si trova un gruppo, che contiene 12 polarità e 24 correlazioni di 6° ordine e che perciò è diverso dal nostro Γ_{72}; di guisa che il G_{36} è suscettibile di due estensioni diverse.

Nel Γ_{48} si dovrebbe trovare la correlazione di 8° ordine $\theta = LO$ sopra considerata, perchè $\theta^2 = Y$; ma allora in Γ_{48} si troverebbe anche la correlazione

$$S\theta \equiv (36')(1\,4'5\,1'2\,5'6\,3'4\,2'),$$

la quale d'altra parte, per essere di 10° ordine, non può far parte di Γ_{48}.

I gruppi icosaedrici G_{60}, G'_{60} non hanno neppur essi gruppi estesi. Infatti un gruppo Γ_{120} esteso di un G_{60}, se esistesse, dovrebbe contenere correlazioni di 10° ordine, perchè non può contenere alcuna correlazione di 8° ordine, non essendovi in G_{60} collineazioni di 4° ordine, e perchè le 60 correlazioni non possono essere tutte polarità. Siccome poi in G_{60} vi sono 6 gruppi ciclici simili, G_5, così in Γ_{120} vi sarebbero pure sei gruppi ciclici simili, Γ_{10}. Segue che se il Γ_{120} esistesse, conterrebbe $6 \times 4 = 24$ correlazioni di 10° ordine, e le rimanenti 36 correlazioni dovrebbero essere polarità; ma queste generano l'intero gruppo Γ_{720}; dunque il gruppo Γ_{120} non esiste.

36. — *Il gruppo $G^{\bullet}_{360}$ nello spazio R_5.*

Sappiamo (n° 32), che quando le coniche-inviluppo di un piano π si rappresentano con punti di uno spazio R_5, ad ogni collineazione del piano π corrisponde in R_5 una collineazione, che muta in sè la varietà M_4^3 e la superficie F_2^4. Vogliamo ora occuparci del gruppo $G^{\bullet}_{360}$ di collineazioni di R_5, che, nel senso ora ricordato, corrispondono alle collineazioni del gruppo G_{360} del piano π; tal gruppo $G^{\bullet}_{360}$ è generato dalle due sostituzioni

$$Z)\quad l'_1 = l_1, \quad l'_2 = l_3, \quad l'_3 = l_4, \quad l'_4 = l_5, \quad l'_5 = l_6, \quad l'_6 = l_2;$$

$$T)\quad l'_1 = \varepsilon^2 l_2, \quad l'_2 = \varepsilon l_3, \quad l'_3 = l_1, \quad l'_4 = l_4, \quad l'_5 = \varepsilon l_5, \quad l'_6 = \varepsilon^2 l_6.$$

È chiaro anzitutto che le collineazioni di $G^{\bullet}_{360}$ producono le permutazioni del gruppo alternante in una sestupla di punti di R_5, che sono i vertici della piramide fondamentale per le coordinate in R_5. La

stessa proprietà ha un altro gruppo di 360 collineazioni in R_5, che fu studiato dal sig. Veronese (*) ed è generato dalle sostituzioni Z e

$$\bar{T})\quad l'_1 = l_2,\quad l'_2 = l_3,\quad l'_3 = l_1,\quad l'_4 = l_4,\quad l'_5 = l_5,\quad l'_6 = l_6.$$

Questo gruppo è essenzialmente diverso dal nostro, come quello che trasforma in sè uno spazio lineare ed una quadrica a quattro dimensioni, che hanno per equazioni

$$l_1 + l_2 + l_3 + l_4 + l_5 + l_6 = 0$$

$$l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 + l_6^2 = 0,$$

mentre per il nostro non vi sono nè spazi lineari nè quadriche trasformate in sè.

È notevole il fatto che siffatti due gruppi di 360 collineazioni in R_5 hanno in comune un sottogruppo icosaedrico, che è quello che lascia fermo il punto di R_5 rappresentativo della conica (1') di π; esso si può ritenere generato da Z e da

$$T^2S)\quad l'_1 = l_3,\quad l'_2 = l_1,\quad l'_3 = l_2,\quad l'_4 = l_5,\quad l'_5 = l_6,\quad l'_6 = l_4$$

e coincide con un gruppo di Serret (n° 26) di permutazioni di sei variabili.

Per il gruppo studiato dal sig. Veronese vi è una infinità di piramidi trasformate in sè; per il nostro gruppo invece godono di tale proprietà soltanto due piramidi diverse, quelle che hanno per vertici i punti rappresentativi delle due sestuple associate di coniche involutorie in π.

Si prenda in R_5 come fondamentale per le coordinate una piramide arbitraria e per punto unità un punto qualunque fuori delle sue *faccie* (iperpiani che passano per i vertici presi cinque a cinque). Chia-

---

(*) Vedi il § 6 della Memoria «Interprétations géométriques de la théorie des substitutions de n lettres particulièrment pour $n = 3, 4, 5, 6$» *Annali di Matematica*, s. 2ª, v. XI, (1882-83).

meremo piramide *associata* alla precedente una piramide che ha per vertici i punti di coordinate

$$(83)\begin{cases}(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1), & (1,\ 1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2), & (1,\ \varepsilon^2,\ 1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon,\ \varepsilon),\\ (1,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ 1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon), & (1,\ \varepsilon,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ 1,\ \varepsilon^2), & (1,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon,\ \varepsilon,\ \varepsilon^2,\ 1).\end{cases}$$

Due piramidi associate sono ciascuna trasformata in sè da un gruppo G'_{360} di collineazioni in R_5.

In una piramide di R_5 chiamiamo *spigoli* le rette congiungenti i vertici due a due ed *assi* gli R_3 intersezioni delle faccie due a due; chiamiamo poi *terna di spigoli opposti* tre spigoli tali che mai due passino per uno stesso vertice, e *terna di assi opposti* tre assi tali che mai due stiano in una stessa faccia. In ogni piramide di R_5 abbiamo 15 spigoli e 15 terne di spigoli opposti, 15 assi e 15 terne di assi opposti. Si dimostra facilmente che due piramidi associate sono in mutua posizione tale che: *a*) ogni spigolo dell'una si appoggia ad una terna di assi opposti dell'altra, cioè ha un punto comune con ciascuno degli assi della terna; la terna di punti d'appoggio ha per coppia hessiana i due vertici, che stanno sullo spigolo, ed è la terna di punti in cui lo spigolo taglia M_4^3; *b*) ogni asse dell'una si appoggia ad una terna di spigoli opposti dell'altra, cioè giace in uno stesso iperpiano con ciascuno degli spigoli della terna; questa terna di iperpiani ha per coppia hessiana le due faccie, che si tagliano sull'asse, ed è la terna di iperpiani tangenti a $\mathbf{M}_4^3$ che passano per l'asse.

Se si prende l'iperpiano polare misto di due vertici d'una piramide rispetto a M_4^3, si ottiene un iperpiano che rappresenta una conica-luogo **T** o **T'**.

Ogni retta, che congiunge un vertice della prima piramide ad un vertice della seconda, incontra la F_2^4 in un punto K^*, rappresentativo d'un punto-doppio K. Se sopra ognuna di tali congiungenti si prende il punto, che col punto K^* e coi due vertici dà il rapporto anarmonico $c-1$, si ottengono i punti che rappresentano le 36 coniche Λ; ecc.

Conoscendosi tutte le coniche-inviluppo, che sono trasformate in sè dalle collineazioni di G_{360} in π, si trovano facilmente i punti uniti delle collineazioni di G'_{360} in R_5.

Un'omologia O di G_{360} ha per centro un punto U e per asse una retta u. Essa trasforma, ciascuna in sè: *a*) le coniche-inviluppo del sistema lineare ∞^3 costituito da tutte le coniche, rispetto a cui U e u si corrispondono come polo e polare; *b*) tutte le coppie di punti costituite dal punto U e da un punto qualunque di u. Segue che *ogni collineazione O^* di G^*_{360} ha uno spazio a 3 dimensioni di punti uniti (spazio fondamentale R_3)* (*) *e fuori di esso una retta di punti uniti (raggio fondamentale r_1), che giace su M_4^3 e non taglia F_2^4.*

Nel sistema ∞^3 considerato in π di coniche-inviluppo, ve ne sono ∞^2 degenerate in coppie di punti; esse sono: α) tutte le coppie di punti della retta u; queste si rappresentano su R_3 coi punti di un piano giacente per intero in M_4^3, il quale contiene la conica u^* di F_2^4 che corrisponde alla retta doppia u; β) le coppie di punti allineati con U e separati armonicamente da U e da u; queste dànno involuzioni sulle rette uscenti da U e si rappresentano su R_3 coi punti delle rette, che proiettano la conica u^* dal punto U^* di F_2^4 rappresentativo del punto doppio U. Segue che *la intersezione della varietà M_4^3 collo spazio fondamentale R_3 per la collineazione O^* si spezza nel piano della conica u^* e nel cono che proietta questa conica dal punto U^*.*

Nella collineazione O^* abbiamo inoltre due spazi (fondamentali) di iperpiani uniti, costituiti da tutti gli iperpiani che contengono l'uno o l'altro degli spazi, R_3, r_1, di punti uniti; e precisamente gli iperpiani, che contengono uno dei due spazi di punti uniti, sono gli iperpiani polari, rispetto ad M_4^3, dei punti dell'altro spazio.

La caratteristica della collineazione O^* è $[(1111)(11)]$ ed il valore del suo invariante assoluto è $= -1$. Per trovare il corrispondente di un punto P, basta per questo tirare la retta che taglia r_1 ed R_3 ed in essa prendere il coniugato armonico di P rispetto ai due punti di incontro.

Una collineazione di 3° ordine, S, del gruppo G_{360} nel piano π ha tre punti uniti in tre punti P. Essa trasforma, ciascuna in sè, le coniche di tre schiere bitangenti, essendo corde di contatto i lati, poli

(*) Cfr. Segre: « Sulla teoria e sulla classificazione delle omografie in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni ». *Memorie Acc. Lincei*, s. 3ª, v. XIX, 1884.

di contatto i vertici opposti, del triangolo unito di S. Segue che *ogni collineazione, S^*, di 3° ordine di G^*_{360} ha tre raggi fondamentali,* ciascuno dei quali congiunge il punto di F^4_2, rappresentativo di uno dei detti tre punti P, considerato come doppio, al punto di M^3_4, rappresentativo della coppia dei rimanenti due punti P.

Nella collineazione S^* abbiamo inoltre tre *assi fondamentali* costituiti da tutti gli iperpiani, che contengono due dei tre raggi fondamentali.

La caratteristica della collineazione S^* è $[(11)(11)(11)]$ ed i valori dei suoi due invarianti assoluti sono ε, ε^2.

Una collineazione di 4° ordine, Y, del gruppo G_{360} nel piano π ha per triangolo unito un triangolo $UV'V''$. Essa trasforma, ciascuna in sè: *a*) le coniche bitangenti in V' e V'' col polo di contatto in U; *b*) le coppie di punti della involuzione che ha per punti doppi V' e V''; *c*) le due coppie di punti U, V' e U, V''. Segue che *ogni collineazione, Y^*, di 4° ordine di G^*_{360} ha due raggi fondamentali e, fuori di questi, due punti uniti isolati; dei due raggi fondamentali l'uno taglia F^4_2 nel punto U^* e taglia ulteriormente M^3_4 nel punto corrispondente alla coppia V', V'', l'altro giace su M^3_4 e taglia F^4_2 nei due punti V'^*, V''^*, corrispondenti ai punti doppi V', V''; i due punti uniti isolati stanno su M^3_4 e corrispondono alle coppie di punti U, V' e U, V''.*

Nella collineazione Y^* abbiamo poi due assi fondamentali e due iperpiani uniti isolati; questi ultimi sono determinati da uno dei punti uniti isolati insieme ai due raggi fondamentali; gli assi fondamentali son costituiti di tutti gli iperpiani, che contengono i due punti uniti isolati insieme ad uno dei raggi fondamentali.

La caratteristica della collineazione Y^* è $[(11)(11)11]$ ed i suoi tre invarianti assoluti hanno per valori -1, i, $-i$.

Una collineazione di 5° ordine, Z, del gruppo G_{360} nel piano π ha per triangolo unito un triangolo $KH'H''$. Essa trasforma, ciascuna in sè: *a*) le coniche bitangenti in H', H'' col polo di contatto in K; *b*) i punti H', H'' considerati come doppi e le coppie di punti K, H' e K, H''. Segue che *ogni collineazione, Z^*, di 5° ordine di G^*_{360} ha un raggio fondamentale che taglia la F^4_2 nel punto K^*, corrispondente al punto doppio K, e taglia ulteriormente la M^3_4 nel punto corrispondente alla coppia H', H''; ha inoltre quattro punti uniti isolati, dei quali due stanno su F^4_2 e gli altri due stanno su M^3_4 e fuori di F^4_2.*

Nella collineazione Z^* abbiamo poi un asse fondamentale e quattro iperpiani uniti isolati; questi ultimi sono determinati dal raggio fondamentale insieme a tre dei quattro punti uniti isolati; l'asse fondamentale è costituito di tutti gli iperpiani, che passano per i quattro punti uniti isolati.

La caratteristica della collineazione Z^* è $[(11)1111]$ ed i suoi quattro invarianti assoluti hanno per valori η, η^2, η^3, η^4.

37. — *Notevoli sestuple di quadriche in R_5.*

Consideriamo ora in R_5 le sei quadriche polari, rispetto alla varietà cubica M_4^3, dei vertici della piramide fondamentale. Le loro equazioni sono

$$Q_i = \frac{1}{3}\frac{\partial\Theta'(l)}{\partial l_i} = 0$$

e stanno scritte per esteso nelle (63). Proponiamoci di trovare i *coni* del fascio di quadriche determinato dalle $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$; dovremo calcolare il discriminante di $Q_1 + \lambda Q_2$ che è

$$D = \begin{vmatrix} 4c' & 0 & \lambda\varepsilon^2 & \lambda\varepsilon & \lambda\varepsilon & \lambda\varepsilon^2 \\ 0 & 4c'\lambda & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon^2 \\ \lambda\varepsilon^2 & \varepsilon^2 & 0 & \varepsilon^2+\lambda\varepsilon & \varepsilon+\lambda\varepsilon^2 & \varepsilon+\lambda\varepsilon \\ \lambda\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon^2+\lambda\varepsilon & 0 & \varepsilon^2+\lambda\varepsilon^2 & \varepsilon+\lambda\varepsilon^2 \\ \lambda\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon+\lambda\varepsilon^2 & \varepsilon^2+\lambda\varepsilon^2 & 0 & \varepsilon^2+\lambda\varepsilon \\ \lambda\varepsilon^2 & \varepsilon^2 & \varepsilon+\lambda\varepsilon & \varepsilon+\lambda\varepsilon^2 & \varepsilon^2+\lambda\varepsilon & 0 \end{vmatrix}.$$

Denotando con d il determinante

$$\begin{vmatrix} 0 & \varepsilon^2+\lambda\varepsilon & \varepsilon+\lambda\varepsilon^2 & \varepsilon+\lambda\varepsilon \\ \varepsilon^2+\lambda\varepsilon & 0 & \varepsilon^2+\lambda\varepsilon^2 & \varepsilon+\lambda\varepsilon^2 \\ \varepsilon+\lambda\varepsilon^2 & \varepsilon^2+\lambda\varepsilon^2 & 0 & \varepsilon^2+\lambda\varepsilon \\ \varepsilon+\lambda\varepsilon & \varepsilon+\lambda\varepsilon^2 & \varepsilon^2+\lambda\varepsilon & 0 \end{vmatrix}$$

e con d_{ik} i suoi minori, e ponendo inoltre

$$F(\nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4) = \sum_{i,k} d_{ik} \nu_i \nu_k \qquad (i, k = 1, 2, 3, 4)$$

si vede facilmente che si ha

$$D = 16 c'^2 d - 4 c'(\lambda^3 + 1) F(\varepsilon^2, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon^2);$$

ma

$$d_{11} = d_{44} = 2 \varepsilon^2 (\lambda^3 + 1), \qquad d_{22} = d_{33} = 2 \varepsilon (\lambda^3 + 1),$$

$$d_{12} = d_{13} = d_{24} = d_{34} = 2(\lambda^3 + 1), \quad d_{14} = \varepsilon d_{23} = 2 \varepsilon^2 (\lambda^3 + 1),$$

$$d = 0, \qquad F(\varepsilon^2, \varepsilon, \varepsilon, \varepsilon^2) = 32 (\lambda^3 + 1);$$

dunque

$$D = - 128 c' (\lambda^3 + 1)^2,$$

inoltre i minori principali di 5° ordine di D hanno tutti il fattore $\lambda^3 + 1$.

Concludiamo: nel fascio di quadriche considerato vi sono tre coni di seconda specie, ed il fascio ha la caratteristica (*)

$$[(11)(11)(11)].$$

Le quadriche del fascio sono le polari, rispetto a M_4^3, dei punti di uno spigolo della piramide fondamentale; i coni di seconda specie del fascio corrispondono ai valori $\lambda = -1, -\varepsilon, -\varepsilon^2$ del parametro λ, e sono le polari dei tre punti, in cui lo spigolo incontra la M_4^3. Per il fatto che nello sviluppo di D mancano i termini in $\lambda^5, \lambda^4, \lambda^2, \lambda$ concludiamo ancora che sono nulli quattro dei cinque invarianti simultanei delle due quadriche $Q_1 = 0$, $Q_2 = 0$ (**).

(*) Vedi Segre: « Studio sulle quadriche in uno spazio lineare ad un numero qualunque di dimensioni ». *Memorie R. Accademia delle Scienze di Torino*, s. 2ª, t. XXXVI, 1884.

(**) Essendo noto (Segre, n° 9 delle *Considerazioni* ecc. sopra citate) che la quadrica polare, rispetto a M_4^3, di ogni punto semplice di questa varietà è un cono

Ciò che abbiamo ora stabilito per le due quadriche $Q_1=0$, $Q_2=0$ vale per due quadriche qualunque $Q_i=0$, $Q_k=0$, perchè nel gruppo G_{720} vi sono collineazioni che mutano le prime due quadriche nelle altre due.

Abbiamo così in R_5 una notevolissima sestupla di quadriche, tali che prendendone due qualunque si annullano quattro dei cinque invarianti simultanei e nel fascio, che esse determinano, vi sono tre coni di seconda specie.

Una seconda sestupla di quadriche, che gode delle stesse proprietà, si ottiene quando si prendono le quadriche polari, rispetto alla varietà M_4^3, dei sei vertici della piramide associata alla piramide fondamentale.

Infatti l'equazione della varietà M_4^3, riferita a questa seconda piramide, si deduce dalla $\Theta'(l)=0$ colla sostituzione (77), ed è (n° 31) $\Theta(l')=0$; così che le equazioni delle quadriche polari dei vertici di detta seconda piramide, nel nuovo sistema di coordinate, sono $\frac{\partial \Theta(l')}{\partial l'_i}=0$, e queste non differiscono dalle equazioni $Q_i=0$ altro che per lo

---

di seconda specie, segue che se dei punti d'una retta (che non giace su M_4^3 nè incontra F_2^4) si prendono le quadriche polari, nel fascio di queste vi sono sempre tre coni di seconda specie, che sono le quadriche polari dei tre punti in cui quella retta incontra M_4^3. Il calcolo sopra svolto ha per scopo, non tanto di verificare questa proprietà relativamente alle quadriche polari dei punti d'uno spigolo della piramide fondamentale, quanto di trovare, mediante lo sviluppo di D, i valori degli invarianti simultanei di Q_1 e Q_2; osservando che due vertici della piramide fondamentale hanno per imagini in π due coniche involutorie e sono tali che ciascuno sta sulla quadrica polare dell'altro rispetto a M_4^3, il risultato ottenuto si può enunciare generalmente così: *se due punti di R_5 stanno ciascuno sulla quadrica polare dell'altro rispetto a M_4^3, queste due quadriche polari hanno quattro degli invarianti simultanei nulli.*—A proposito delle quadriche polari rispetto ad M_4^3 enunciamo ancora queste altre proprietà: *la quadrica polare di ogni punto P di F_2^4 è un cono di terza specie, che ha per punti doppi i punti del piano tangente in P a F_2^4; le quadriche polari dei punti di una retta di M_4^3 formano un fascio di coni di seconda specie, il quale contiene due, uno, o nessuno cono di terza specie; le quadriche polari dei punti di un piano, contenente una conica di F_2^4, formano una rete di coni di seconda specie, la quale contiene una semplice infinità (non lineare) di coni di terza specie;* ecc.

scambio dei coefficienti c', ε in c, ε^2, il quale scambio non altera i risultati sopra trovati per le $Q_i = 0$.

L'equazione d'una quadrica qualunque della seconda sestupla riferita alla prima piramide, si ottiene moltiplicando le Q_i per le coordinate (83) d'un vertice della seconda piramide e sommando. Così si trova, che la polare del vertice rappresentativo della conica (1') di π, ha per equazione

$$
\begin{aligned}
(84) \qquad & c'(l_1^2 + l_2^2 + l_3^2 + l_4^2 + l_5^2 + l_6^2) \\
& = l_1 l_2 + l_1 l_3 + l_1 l_4 + l_1 l_5 + l_1 l_6 + l_2 l_3 + l_2 l_4 + l_2 l_5 + l_2 l_6 \\
& \quad + l_3 l_4 + l_3 l_5 + l_3 l_6 + l_4 l_5 + l_4 l_6 + l_5 l_6,
\end{aligned}
$$

la quale risulta simmetrica nelle l, come si poteva prevedere. Invero essa deve essere inalterata dal gruppo icosaedrico di collineazioni, che lascia fermo il vertice rappresentativo della conica (1') in π, e questo gruppo icosaedrico coincide, come si è avvertito al n° 36, con un gruppo di Serret di permutazioni tra le l_1, l_2, l_3, l_4, l_5, l_6; inoltre è noto che, fra le funzioni di 2° grado di sei variabili, soltanto quelle simmetriche sono inalterate da un gruppo di Serret. Le equazioni delle altre cinque quadriche invece non sono più simmetriche nelle l, esse si deducono subito dalla precedente colle sostituzioni T, ZT, Z^2T, Z^3T, Z^4T.

(Continua)

Palermo, gennajo 1899.

F. GERBALDI.

SULLE RETI SOVRABBONDANTI DI CURVE PIANE

DI GENERE 2.

Nota di **M. de Franchis**, in Palermo.

Adunanza del 12 febbrajo 1899.

In una Nota pubblicata nel tomo I di questi Rendiconti (*), il prof. Martinetti s'occupa della riduzione all'ordine minimo delle reti sovrabbondanti di curve piane di genere 2. Nell'occuparmi di questioni analoghe, in questi ultimi tempi, mi sono imbattuto in una rete sovrabbondante di curve del 5° ordine di genere 2, d'ordine minimo, non contenuta nei tipi assegnati dal sig. Martinetti. Tale rete è costituita dalle curve del 5° ordine dotate d'un punto base triplo A ed uno doppio B, ad esso infinitamente vicino, le quali inoltre si toccano nel punto A, secondo un contatto di 10° ordine, lungo un ramo lineare e di 2^{a} classe (non contenente B).

La costruzione più generale di una tal rete s'ottiene considerando una curva C_5, del 5° ordine, dotata d'un punto A triplo ed ivi di tre rami lineari, dei quali due si tocchino ivi semplicemente, ed il rimanente (che non tocca gli altri due) sia di 2^{a} classe (cioè presenti un'in-

(*) Martinetti: *Sopra alcuni sistemi lineari di curve piane algebriche di genere* 2 (questi Rendiconti, t. I, pag. 205).

flessione in A) (*). Detta t la tangente a tal ramo, la rete predetta è quella individuata dalla curva C_5 e dal fascio riducibile la cui curva generica si compone della retta t contata 4 volte e d'una qualsiasi retta passante per A.

La ragione dell'omissione di tal rete nella Nota citata si troverà leggendo ivi il ragionamento del n° 2.

Torna qui acconcio fare osservare che, dietro la discussione che si trova nella mia Nota: *Riduzione dei fasci di curve piane di genere* 2 (**) (vedasi specialmente il n° 1, ove discutonsi i sistemi con singolarità superiori), si può ora asserire che *non esistono reti sovrabbondanti di curve piane di genere 2 le quali non possano ridursi, con trasformazioni Cremoniane del piano, o al tipo predetto ovvero ad uno dei tipi trovati dal sig. Martinetti.*

Palermo, 12 febbrajo 1899.

M. DE FRANCHIS.

(*) Se, adoperando coordinate proiettive, si pone il punto triplo A nel punto (0, 0, 1) e si assume il lato $x_1 = 0$ come tangente comune ai due rami toccantisi in A ed il lato $x_2 = 0$ come tangente all'ulteriore ramo (di 2ª classe), la equazione di C_5 è

$$C_5 \equiv a_1 x_1^2 x_2 x_3^2 + a_2 x_1 x_2 x_3 f_2(x_1, x_2) + f_5(x_1, x_2) = 0,$$

ove $f_2(x_1, x_2)$ ed $f_5(x_1, x_2)$ sono forme binarie, rispettivamente di 2° e 5° grado, in x_1, x_2.

(**) Questi Rendiconti, t. XIII, pp. 1-27.

SUR LA DÉTERMINATION DE LA SURFACE D'UNE PISTE DE VÉLODROME (*);

par M. C. Bourlet, à Paris.

Adunanza del 26 marzo 1899.

1. Le problème de la détermination de la surface d'une piste de vélodrome, dans un virage, peut s'énoncer de la façon suivante :

« Trouver une surface telle, qu'en chacun de ses points, il existe « une relation *donnée* entre la pente du plan tangent et le rayon de « courbure de la ligne de niveau qui passe en ce point ».

Pour achever de déterminer la surface, on l'astreint à passer par une ligne de niveau donnée à l'avance, qu'on appelle *la ligne de foi* (**).

Prenons trois axes de coordonnées rectangulaires, le plan zox étant horizontal. Si on désigne, comme de coutume, par p, q; r, s, t les dérivées partielles $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$; $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, la pente u du plan

(*) Ce mémoire fait partie d'un travail sur la Bicyclette, couronné par l'Académie des Sciences de Paris (Prix Fourneyron, 1898), et dont une autre portion a paru dans le *Bull. de la Soc. Math. de France* (1899).

(**) Consulter: Bourlet, *Nouveau Traité des Bicycles et Bicyclettes*, Équilibre et Direction, chap. III.

tangent en un point x, y, z de la surface est:

$$u = \frac{\sqrt{1+p^2}}{q}.$$

Désignons par R le rayon de courbure de la ligne de niveau qui passe en ce point, on a:

$$R = \frac{(\sqrt{1+p^2})^3}{r}.$$

Si donc il existe entre la pente u et la rayon R une relation donnée à l'avance

(1) $$R = \varphi(u),$$

la surface cherchée vérifiera l'équation aux dérivées partielles du second ordre:

(2) $$r = \frac{(\sqrt{1+p^2})^3}{\varphi\left[\frac{\sqrt{1+p^2}}{q}\right]}.$$

Le problème en question revient donc à trouver une surface intégrale de l'équation (2), passant par une ligne de niveau donnée.

2. L'équation (2) est une équation de Monge et d'Ampère dans laquelle les deux systèmes de caractéristiques sont confondus.

L'unique système de caractéristiques est défini par les équations aux différentielles totales suivantes:

(3) $$\begin{cases} dy = 0, \qquad dz = p\,dx, \\ (\sqrt{1+p^2})^3 dx - \varphi\left(\frac{\sqrt{1+p^2}}{q}\right) dp = 0. \end{cases}$$

Il admet l'intégrale première

(4) $$y = \text{constante},$$

qui prouve que les caractéristiques sont des lignes de niveau.

Ce fait était presque évident, d'après la définition géométrique de ces surfaces.

Dans le cas général, l'intégrale (4) est la seule combinaison intégrable des équations (3).

En effet, la dernière des équations (3) ne contenant que dx et dp, pour qu'il existe une combinaison intégrable nouvelle, il faut et il suffit que cette équation soit intégrable et, par suite, ne contienne pas q. Ceci exige alors que l'on ait

$$\varphi\left(\frac{\sqrt{1+p^2}}{q}\right) = a,$$

a étant une constante.

Dans ce cas, comme on sait, l'intégration de l'équation (2) se fait sans quadratures (*).

Géométriquement c'est évident, car, alors, on a :

$$R = a.$$

Toutes les lignes de niveau sont des cercles de même rayon a; et les surfaces cherchées sont toutes celles qui sont engendrées par un cercle de rayon invariable qui se meut de façon que son plan reste parallèle à un plan fixe.

En fait, dans le problème qui nous intéresse, R n'est pas constant, car on a :

$$\varphi(u) = \frac{K[1 - uf]}{u + f},$$

K et f étant deux constantes (**).

On en conclut que l'intégration de l'équation (2) n'est pas possible par la méthode de Monge et d'Ampère, puisqu'on ne connaît qu'*une seule* combinaison intégrable des équations différentielles des caractéristiques.

(*) Voir, par exemple : Goursat, *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. I, nos 37 à 39.

(**) Voir : Bourlet, loc. cit., page 132.

3. Étant donnée une équation aux dérivées partielles du second ordre, on sait que si on considère une courbe quelconque C et une développable D circonscrite à cette courbe, il existe, en général, une intégrale et une seule, passant par C et tangente, en tous les points de cette courbe, à la développable D (*).

Dans le cas actuel nous astreignons la surface à la seule condition de passer par une ligne de niveau donnée; il semble donc que le problème n'est pas déterminé.

Il l'est, cependant, et cela tient à ce que la courbe que nous nous donnons, est une caractéristique.

Lorsqu'en effet une équation aux dérivées partielles a ses deux systèmes de caractéristiques confondus, et qu'on se propose de trouver une intégrale passant par une courbe caractéristique, les résultats généraux tombent en défaut (**).

Il nous faut donc faire un examen spécial de notre cas.

$\varphi(u)$ n'etant pas une constante, l'équation (2) peut être résolue par rapport à q et mise sous la forme:

$$q = \psi(r, p). \tag{4}$$

Soient

$$y = 0, \qquad z = f(x)$$

les équations de la ligne de foi. Il s'agit de prouver que l'équation (4) n'admet qu'une seule intégrale qui, pour $y = 0$, se réduise à $f(x)$.

Or, cette intégrale, si elle existe, sera donnée par une série de la forme:

$$z = f(x) + y f_1(x) + \frac{y^2}{2} f_2(x) + \cdots + \frac{y^n}{n!} f_n(x) + \cdots \tag{5}$$

et on a:

$$f_n(x) = \left(\frac{\partial^n z}{\partial y^n}\right)_{(y=0)}.$$

(*) Goursat, loc. cit., nos 16 à 18.
(**) Goursat, loc. cit., n° 88.

La connaissance de $f(x)$ nous fait connaitre toutes les derivées de z, prises uniquement par rapport à x, pour $y = 0$; car on a :

$$\left(\frac{\partial^n z}{\partial x^n}\right)_{(y=0)} = \frac{d^n f(x)}{dx^n}.$$

Si, alors, dans l'équation (2), nous faisons $y = 0$, nous avons l'égalité

$$f_1(x) = \psi\left[\frac{d^2 f(x)}{dx^2}, \quad \frac{df(x)}{dx}\right],$$

qui nous fournit $f_1(x)$. On en déduit les valeurs de toutes les derivées de z, contenant une seule fois y, pour $y = 0$; car on a :

$$\left(\frac{\partial^n z}{\partial x^{n-1}\partial y}\right)_{(y=0)} = \frac{d^{n-1} f_1(x)}{dx^{n-1}}.$$

Prenons, alors, les dérivées des deux membres de l'équation (4) par rapport à y et faisons $y = 0$, nous avons, dans le premier membre, $f_2(x)$ et dans le second, des dérivées par rapport à x seulement, ou contenant une seule fois y. Nous avons ainsi $f_2(x)$ en fonction de $f(x)$, $f_1(x)$ et leurs dérivées.

En prenant une seconde fois la dérivée de l'équation (4) par rapport à y et faisant $y = 0$, on aura $f_3(x)$, connaissant $f(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$; et ainsi de suite, de proche en proche.

Les fonctions $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\ldots f_n(x)$, $\ldots$ sont donc parfaitement déterminées dès qu'on connait $f(x)$.

Si donc il existe une surface intégrale, passant par la caractéristique

$$y = 0, \qquad z = f(x),$$

il en existe une seule.

4. Comme nous venons de le voir, nous ne savons pas intégrer l'équation (2) dans le cas général, où la ligne de foi donnée est quelconque. Mais si nous nous donnons une ligne de foi particulière, le problème pourra être soluble dans certains cas.

En voici un exemple qui se présente dans la pratique.

Cherchons la surface intégrale qui passe par un cercle donné dans le plan des zx.

Pour cela, *nous chercherons s'il existe une surface intégrale dont toutes les lignes de niveau sont des cercles.*

Si une telle surface existe, tout le long d'une ligne de niveau le plan tangent aura une pente constante; nous sommes donc amenés à chercher les caractéristiques qui vérifient une relation de la forme

$$\frac{\sqrt{1+p^2}}{q} = \alpha.$$

En vertu des équations (3), chacune de ces caractéristiques vérifiera un système de la forme :

$$\left\{\begin{array}{l} dy = 0, \qquad dx = \dfrac{\varphi(\alpha)\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}, \qquad dz = \dfrac{\varphi(\alpha)\,p\,dp}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}}, \\ \text{avec} \\ \qquad\qquad \sqrt{1+p^2} = q\alpha. \end{array}\right.$$

Ce système s'intègre immédiatement.

Pour faire aisément le calcul, posons :

$$p = \operatorname{tg}\lambda,$$

λ étant une variable auxiliaire; on en tire, de suite :

$$q = \frac{1}{\alpha\cos\lambda},$$

$$x = \varphi(\alpha)\sin\lambda + x_0,$$

$$y = y_0,$$

$$z = -\varphi(\alpha)\cos\lambda + z_0,$$

x_0, y_0, z_0 étant des constantes arbitraires.

Pour avoir une surface intégrale, répondant aux conditions énoncées, il faut et il suffit qu'on puisse déterminer x_0, y_0, z_0 en fonction de α, de façon que la relation

$$dz = p\,dx + q\,dy$$

soit identiquement vérifiée.

En portant les valeurs de x, y, z, p, q dans cette relation, on trouve qu'on doit avoir, identiquement :

$$\frac{dx_0}{d\alpha}\sin\varphi - \frac{dz_0}{d\alpha}\cos\varphi + \frac{1}{\alpha}\frac{dy_0}{d\alpha} + \frac{d\varphi}{d\alpha} = 0,$$

ce qu'on vérifie en prenant x_0 et z_0 *constants*

$$x_0 = a, \qquad z_0 = c,$$

et

$$\frac{dy_0}{d\alpha} = -\alpha\frac{d\varphi}{d\alpha}.$$

Soit, alors, $\psi(\alpha)$ une fonction telle que l'on ait :

$$\frac{d\psi}{d\alpha} = \varphi(\alpha),$$

on aura :

$$y_0 = \psi(\alpha) - \alpha\frac{d\psi}{d\alpha} + b,$$

b étant une constante arbitraire.

Finalement, toutes les surfaces cherchées sont données par les équations

$$(6) \qquad \begin{cases} x - a = \varphi(\alpha)\sin\lambda, \\ y - b = \psi(\alpha) - \alpha\varphi(\alpha), \\ z - c = -\varphi(\alpha)\cos\lambda, \end{cases}$$

où

$$(7) \qquad \psi(\alpha) = \int \varphi(\alpha)\, d\alpha.$$

Il restera à choisir les trois constantes a, b, c de façon que la surface passe par le cercle donné dans le plan des zx.

Les surfaces représentées par les équations (6) sont de révolution autour d'un axe vertical, ce qui était à prévoir.

En prenant

$$\varphi(\alpha) = \frac{K(1 - f\alpha)}{\alpha + f},$$

on retrouve la solution pratique que j'ai donnée dans mon *Nouveau Traité des Bicycles et Bicyclettes* [1er volume, Équilibre et Direction, pages 156 à 160].

Paris, février 1899.

C. BOURLET.

NOTE ON THE CONTACT TRANSFORMATIONS OF DEVELOPABLE SURFACES.

By E. O. Lovett, of Princeton (New Jersey, U. S. A.).

Adunanza del 15 gennajo 1899.

In the fifth (1891) volume of the *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,* Prof. G. Vivanti has derived a family of contact transformations which can be generalized in the following manner.

According to the fundamental theorem of Lie's theory of contact transformations the relations

$$(1)\qquad [X_i, X_j] = 0, \qquad [X_i, Z] = 0, \qquad [P_i, P_j] = 0,$$

$$[P_i, Z] = \rho P_i, \qquad [P_i, X_j] \begin{array}{l} = 0,\ i \neq j, \\ = \rho,\ i = j, \end{array} \qquad \rho \neq 0$$

where

$$(2)\qquad [F_i, F_j] = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial F_i}{\partial p_k} \frac{d F_j}{d x_k} - \frac{\partial F_j}{\partial p_k} \frac{d F_i}{d x_k} \right),$$

$$(3)\qquad \frac{d F_j}{d x_k} = \frac{\partial F_j}{\partial x_k} + p_k \frac{\partial F_j}{\partial z} = jk,$$

are the necessary and sufficient conditions that the $2n+1$ equations

$$(4)\quad z' = Z(z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n),\quad x_i' = X_i,\quad p_i' = P_i,\quad i = 1, 2, \ldots, n$$

define a contact transformation between the variables $z, x_1, \ldots, x_n, p_1, \ldots, p_n$ and the variables $z', x_1', \ldots, x_n', p_1', \ldots, p_n'$.

It is proposed to seek those contact transformations which leave the partial differential equation of the second order

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} p_{1,1}, & p_{1,2}, & \cdots, & p_{1,n} \\ p_{2,1}, & p_{2,2}, & \cdots, & p_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ p_{n,1}, & p_{n,2}, & \cdots, & p_{n,n} \end{vmatrix} = 0,$$

invariant.

Putting

$$(6)\qquad \begin{gathered} F^{(i)} = F_{x_i} + p_i F_z + \sum_{j=1}^{n} p_{i,j} F_{p_j}, \\ p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i},\quad p_{i,j} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = p_{j,i},\qquad i = 1, \ldots, n \end{gathered}$$

and

$$(7)\qquad \begin{vmatrix} X_1^{(1)}, & X_1^{(2)}, & \ldots, & X_1^{(n)} \\ X_2^{(1)}, & X_2^{(2)}, & \ldots, & X_2^{(n)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ X_n^{(1)}, & X_n^{(2)}, & \ldots, & X_n^{(n)} \end{vmatrix} = \Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n),$$

we have

$$(8)\qquad \begin{vmatrix} P_{1,1}, & P_{1,2}, & \ldots, & P_{1,n} \\ P_{2,1}, & P_{2,2}, & \ldots, & P_{2,n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ P_{n,1}, & P_{n,2}, & \ldots, & P_{n,n} \end{vmatrix} = \frac{\Phi(P_1, P_2, \ldots, P_n)}{\Phi(X_1, X_2, \ldots, X_n)},$$

by virtue of the identities

$$(9)\qquad dZ = \sum_{i=1}^{n} P_i\,dX_i, \qquad dP_i = \sum_{j=1}^{n} P_{i,j}\,dX_j.$$

If the equation

$$|p_{1,1}, p_{2,2}, \ldots, p_{n,n}| = 0$$

is to be invariant under the transformation (4) we must have simultaneously the equation

$$(10)\qquad |P_{1,1}, P_{2,2}, \ldots, P_{n,n}| = 0;$$

but this equation (9) is a consequence of the equation

$$(11)\qquad \Phi(P_1, P_2, \ldots, P_n) = 0;$$

then by expressing that this last equation (11) is to be true for all values of the $p_{i,j}$'s and as a consequence of the equation (5) we obtain equations of condition necessary and sufficient for determining the forms of the functions defining the contact transformations which we are seeking.

For simplicity the reckoning will be carried through in four variables z, x_1, x_2, x_3. The steps made are capable of immediate extension to the case $n+1$ variables.

We have then to expand the form

$$(12)\qquad \Phi(P_1, P_2, P_3);$$

putting for brevity

$$(13)\qquad ij = \frac{\partial P_i}{\partial x_j} + p_j\frac{\partial P_i}{\partial z}, \qquad (ij) = \frac{\partial P_i}{\partial p_j},$$

the form (12) becomes

$$
\begin{aligned}
&|(1),\,(2),\,(3)|\cdot\Phi(p_1,\,p_2,\,p_3)+|(1),\,(2),\,3|\cdot(p_{11}p_{22}-p_{12}^2)\\
&+|1,\,(2),\,(3)|\cdot(p_{22}p_{33}-p_{23}^2)+|(1),\,2,\,(3)|\cdot(p_{33}p_{11}-p_{31}^2)\\
&+[|(1),\,(2),\,2|+|(1),\,3,\,(3)|](p_{12}p_{13}-p_{11}p_{23})+[|1,\,(1),\,(2)|\\
&+|(2),\,(3),\,3|](p_{12}p_{23}-p_{13}p_{22})+[|1,\,(1),\,(3)|+|(2),\,2,\,(3)|](p_{12}p_{33}-p_{13}p_{23})\\
&+|(1),\,2,\,3|p_{11}+|1,\,(2),\,3|p_{22}+|1,\,2,\,(3)|p_{33}+[|1,\,(1),\,(3)|+|(2),\,2,\,3|]p_{12}\\
&+[|1,\,2,\,(2)|+|1,\,(3),\,3|]p_{23}+[|1,\,2,\,(1)|+|(3),\,2,\,3|]p_{31}+|1,\,2,\,3|,
\end{aligned}
\tag{14}
$$

where

$$
|(1),\,(2),\,3|=\begin{vmatrix}(11) & (12) & 13\\ (21) & (22) & 23\\ (31) & (32) & 33\end{vmatrix},\ \ldots. \tag{15}
$$

The expression (14) is to be identically zero hence we have

$$
\Delta=|(1),\,(2),\,(3)|\neq 0 \tag{16}
$$

$$
|(1),\,(2),\,3|=0,\quad |1,\,(2),\,(3)|=0,\quad |(1),\,2,\,(3)|=0, \tag{17}
$$

$$
\begin{gathered}
|(1),\,(2),\,2|+|(1),\,3,\,(3)|=0,\quad |1,\,(1),\,(2)|+|(2),\,(3),\,3|=0,\\
|1,\,(1),\,(3)|+|(2),\,2,\,(3)|=0,
\end{gathered}
\tag{18}
$$

$$
|(1),\,2,\,3|=0,\quad |1,\,(2),\,3|=0,\quad |1,\,2,\,(3)|=0,\quad |1,\,2,\,3|=0, \tag{19}
$$

$$
\begin{gathered}
|1,\,(1),\,3|+|(2),\,2,\,3|=0,\quad |1,\,2,\,(2)|+|1,\,(3),\,3|=0,\\
|1,\,2,\,(1)|+|(3),\,2,\,3|=0.
\end{gathered}
\tag{20}
$$

The functions P_1, P_2, P_3 to be capable of assisting in defining a contact transformation must satisfy the relations

$$
[P_1,\,P_2]=0,\quad [P_2,\,P_3]=0,\quad [P_3,\,P_1]=0, \tag{21}
$$

according to Lie's fundamental theorem expressed in (1).

The development of these relations (21) gives

$$
(22)\qquad
\begin{aligned}
&\vert(11),\ 21\vert + \vert(12),\ 22\vert + \vert(13),\ 23\vert = 0,\\
&\vert(21),\ 31\vert + \vert(22),\ 32\vert + \vert(23),\ 33\vert = 0,\\
&\vert(31),\ 11\vert + \vert(32),\ 12\vert + \vert(33),\ 13\vert = 0.
\end{aligned}
$$

It is easy to verify that this last system of equations leads to the following

$$
(23)\qquad
\begin{aligned}
&\vert(1), (2), 2\vert + \vert(1), (3), 3\vert = 0, \quad \vert(1), (2), 1\vert + \vert(3), (2), 3\vert = 0,\\
&\qquad\qquad \vert(1), (3), 1\vert + \vert(2), (3), 2\vert = 0.
\end{aligned}
$$

By noting the equations

$$\vert(i),\ (j),\ k\vert + \vert(j),\ (i),\ k\vert = 0,\ \ldots,$$

the equations (17), (18) and (23) give

$$(24)\quad \vert(1),\ (2),\ 1\vert = 0, \quad \vert(2),\ (3),\ 1\vert = 0, \quad \vert(3),\ (1),\ 1\vert = 0,$$

$$(25)\quad \vert(1),\ (2),\ 2\vert = 0, \quad \vert(2),\ (3),\ 2\vert = 0, \quad \vert(3),\ (1),\ 2\vert = 0,$$

$$(26)\quad \vert(1),\ (2),\ 3\vert = 0, \quad \vert(2),\ (3),\ 3\vert = 0, \quad \vert(3),\ (1),\ 3\vert = 0.$$

The equations (24) are equivalent to the simultaneous system

$$
(27)\qquad
\begin{aligned}
&[13]11 + [23]21 + [33]31 = 0,\\
&[12]11 + [22]21 + [32]31 = 0,\\
&[11]11 + [21]21 + [31]31 = 0,
\end{aligned}
$$

where [13] is the minor of (1), (2), (3) corresponding to the element (13).

But since

$$\|[1],\ [2],\ [3]\| = |(1),\ (2),\ (3)|^2,$$

and

$$|(1),\ (2),\ (3)| \neq 0,$$

we have from (27) and from the simultaneous systems equivalent to the equations (25) and (26), respectively,

$$(28)\qquad \begin{array}{lll} 11 = 0, & 21 = 0, & 31 = 0; \\ 12 = 0, & 22 = 0, & 32 = 0; \\ 13 = 0, & 23 = 0, & 33 = 0. \end{array}$$

By applying the method of Mayer to the complete system

$$(29)\qquad 11 = 0, \qquad 12 = 0, \qquad 13 = 0,$$

we find the four distinct integrales

$$(30)\qquad \zeta = \sum_{i=1}^{3} p_i x_i - z, \quad p_1,\ p_2,\ p_3;$$

hence, if φ is any arbitrary function

$$(31)\qquad P_1 = \varphi(\zeta,\ p_1,\ p_2,\ p_3).$$

Similarly

$$(32)\qquad P_2 = \psi(\zeta,\ p_1,\ p_2,\ p_3), \qquad P_3 = \chi(\zeta,\ p_1,\ p_2,\ p_3).$$

The remaining equations of the system (1) furnish the means of determining the forms of the functions Z, X_1, X_2, X_3.

Put for brevity

$$(33)\qquad \begin{gathered} Z_i = \frac{\partial Z}{\partial x_i} + p_i \frac{\partial Z}{\partial z}, \qquad Z_{(i)} = \frac{\partial Z}{\partial p_i}, \\ \frac{\partial X_1}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_1}{\partial z} = 11, \ldots, \frac{\partial X_1}{\partial p_1} = (11), \ldots; \end{gathered}$$

then taking account of the equations (28) we have from (1)

$$
(34)\quad \begin{aligned}
[P_1, X_2] &= (11)21 + (12)22 + (13)23 = 0,\\
[P_2, X_3] &= (21)31 + (22)32 + (22)33 = 0,\\
[P_3, X_1] &= (31)11 + (32)12 + (33)13 = 0;
\end{aligned}
$$

$$
(35)\quad \begin{aligned}
[X_1, P_2] &= (21)11 + (22)12 + (23)13 = 0,\\
[X_2, P_3] &= (31)21 + (32)22 + (33)23 = 0,\\
[X_3, P_1] &= (11)31 + (12)32 + (13)33 = 0;
\end{aligned}
$$

$$
(36)\quad \begin{aligned}
[X_1, X_2] &= |(11), 21| + |(12), 22| + |(13), 23| = 0,\\
[X_2, X_3] &= |(21), 31| + |(22), 32| + |(23), 33| = 0,\\
[X_3, X_1] &= |(31), 11| + |(32), 12| + |(33), 13| = 0;
\end{aligned}
$$

$$
(37)\quad \begin{aligned}
[X_1, Z] &= (11)Z_1 - 11Z_{(1)} + (12)Z_2 - 12Z_{(2)} + (13)Z_3 - 13Z_{(3)} = 0,\\
[X_2, Z] &= (21)Z_1 - 21Z_{(1)} + (22)Z_2 - 22Z_{(2)} + (23)Z_3 - 23Z_{(3)} = 0,\\
[X_3, Z] &= (31)Z_1 - 31Z_{(1)} + (32)Z_2 - 32Z_{(2)} + (33)Z_3 - 33Z_{(3)} = 0;
\end{aligned}
$$

$$
(38)\quad \begin{aligned}
[P_1, X_1] &= (11)11 + (12)12 + (13)13 = \rho,\\
[P_2, X_2] &= (21)21 + (22)22 + (23)23 = \rho,\\
[P_3, X_3] &= (31)31 + (32)32 + (33)33 = \rho;
\end{aligned}
$$

$$
(39)\quad \begin{aligned}
[P_1, Z] &= (11)Z_1 + (12)Z_2 + (13)Z_3 = \rho P_1,\\
[P_2, Z] &= (21)Z_1 + (22)Z_2 + (23)Z_3 = \rho P_2,\\
[P_3, Z] &= (31)Z_1 + (32)Z_2 + (33)Z_3 = \rho P_3.
\end{aligned}
$$

The solution of equations (39) yields

$$
(40)\quad \Delta Z_1 = \rho|P_1, (2), (3)|, \quad \Delta Z_2 = \rho|(1), P_2, (3)|, \quad \Delta Z_3 = \rho|(1), (2), P_3|;
$$

from the equations (34), (35) and (38) we have

(41) $D(11)=\rho[11],\ D(12)=\rho[12],\ \ldots,\ D(33)=\rho[33],$

in which [11] is the minor corresponding to the element 11 of the determinant

(42)
$$D=\begin{vmatrix} 11, & 12, & 13 \\ 21, & 22, & 23 \\ 31, & 32, & 33 \end{vmatrix};$$

substituting the values (41) in the determinant Δ, the latter becomes

(43) $\Delta=\frac{\rho^3}{D^3}\|[11],\ [22],\ [33]\|=\frac{\rho^3}{D^3}|11,\ 22,\ 33|^2=\frac{\rho^3}{D};$

hence

(44) $\rho^2(11)=\Delta[11],\ \rho^2(12)=\Delta[12],\ \ldots,\ \rho^2(33)=\Delta[33];$

the substitution of these values in (40) gives

(45)
$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{\Delta}{\rho^3}|P_1,\ [22],\ [33]\| = \frac{1}{D}|P_1,\ [22],\ [33]\| \\ &= \frac{P_1\{[11]\}+P_2\{[21]\}+P_3\{[31]\}}{D} \\ &= P_1 11 + P_2 21 + P_3 31, \\ Z_2 &= P_1 12 + P_2 22 + P_3 32, \\ Z_3 &= P_1 13 + P_2 23 + P_3 33. \end{aligned}$$

If these values of Z_1, Z_2, Z_3 be put in the equations (37) we have, after an easy reduction that takes account of the equations (36)

(46)
$$\begin{aligned} Z_{(1)} &= P_1(11)+P_2(21)+P_3(31), \\ Z_{(2)} &= P_1(12)+P_2(22)+P_3(32), \\ Z_{(3)} &= P_1(13)+P_2(23)+P_3(33). \end{aligned}$$

In order to find the form of the function Z it is found convenient to assume it in the form

$$Z = \sum_{i=1}^{3} P_i X_i - T, \tag{47}$$

where T is an unknown function to be determined.

Differentiating (47) and observing again the equations (28) we find

$$\begin{aligned} Z_1 &= 11\,P_1 + 21\,P_2 + 31\,P_3 - T_1, \\ Z_2 &= 12\,P_1 + 22\,P_2 + 32\,P_3 - T_2, \\ Z_3 &= 13\,P_1 + 23\,P_2 + 33\,P_3 - T_3; \end{aligned} \tag{48}$$

$$\begin{aligned} Z_{(1)} &= 11P_1 + 21P_2 + 31P_3 + (11)X_1 + (21)X_2 + (31)X_3 - T_{(1)}, \\ Z_{(2)} &= 12P_1 + 22P_2 + 32P_3 + (12)X_1 + (22)X_2 + (32)X_3 - T_{(2)}, \\ Z_{(3)} &= 13P_1 + 23P_2 + 33P_3 + (13)X_1 + (23)X_2 + (33)X_3 - T_{(3)}; \end{aligned} \tag{49}$$

where the subscripts of the X's and P's are ordinary subscripts while those of T have the meaning given to those of Z in the formulae (33).

The comparison of (48) and (49) with (45) and (46) respectively gives the following system of equations for the function T:

$$T_1 = 0, \quad T_2 = 0, \quad T_3 = 0; \tag{50}$$

$$\begin{aligned} T_{(1)} &= (11)X_1 + (21)X_2 + (31)X_3, \\ T_{(2)} &= (12)X_1 + (22)X_2 + (32)X_3, \\ T_{(3)} &= (13)X_1 + (23)X_2 + (33)X_3. \end{aligned} \tag{51}$$

By integrating the complete system (51) we have finally

$$T = \sum_{i=1}^{3} P_i X_i - Z = \text{[illegible]} \tag{52}$$

then

$$Z = \sum_{i=1}^{3} P_i X_i - \omega(\zeta, p_1, p_2, p_3) \tag{53}$$

$$= \varphi X_1 + \psi X_2 + \chi X_3 - \omega. \tag{54}$$

To determine the forms of the functions X_1, X_2, X_3 we remark in the first place that the expanded form of the equations (34) is

$$\begin{gathered} \frac{\partial P_1}{\partial p_1}\left\{\frac{\partial X_2}{\partial x_1} + p_1 \frac{\partial X_2}{\partial \zeta}\right\} + \frac{\partial P_1}{\partial p_2}\left\{\frac{\partial X_2}{\partial x_2} + p_2 \frac{\partial X_2}{\partial \zeta}\right\} \\ + \frac{\partial P_1}{\partial p_3}\left\{\frac{\partial X_2}{\partial x_3} + p_3 \frac{\partial X_2}{\partial x_3}\right\} = 0, \end{gathered} \tag{55}$$

or, by noting that we have put

$$\zeta = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3,$$

and that the P 's have been found to have the forms given by the formulae (31) and (32),

$$\begin{gathered} (x_1 \varphi_\zeta + \varphi_{p_1}) \frac{\partial X_2}{\partial x_1} + (x_2 \varphi_\zeta + \varphi_{p_2}) \frac{\partial X_2}{\partial x_2} + (x_3 \varphi_\zeta + \varphi_{p_3}) \frac{\partial X_2}{\partial x_3} \\ + [(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3)\varphi_\zeta + p_1 \varphi_{p_1} + p_2 \varphi_{p_2} + p_3 \varphi_{p_3}] \frac{\partial X_2}{\partial \zeta} = 0. \end{gathered} \tag{56}$$

This partial differential equation is equivalent to the simultaneous system

$$\begin{gathered} \frac{dp_1}{0} = \frac{dp_2}{0} = \frac{dp_3}{0} = \frac{dx_1}{x_1 \varphi_\zeta + \varphi_{p_1}} = \frac{dx_2}{x_2 \varphi_\zeta + \varphi_{p_2}} = \frac{dx_3}{x_3 \varphi_\zeta + \varphi_{p_3}} = \\ = \frac{d\zeta}{(p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3)\varphi_\zeta + p_1 \varphi_{p_1} + p_2 \varphi_{p_2} + p_3 \varphi_{p_3}} = \frac{dX_2}{0}. \end{gathered} \tag{57}$$

Four of the seven integrals of this system can be written at once, namely,

$$X_2, \; p_1, \; p_2, \; p_3. \tag{58}$$

By multiplying the first seven members of the system both numerator and denominator by x_1, x_2, x_3, p_1, p_2, p_3, -1, respectively, and adding we find

$$(59) \qquad \frac{d\zeta}{0};$$

hence ζ is another integral of the system.

By introducing the integrals already found in the system composed of the fourth, fifth and sixth members of the above system we have, on integrating the resulting system, the last two integrals

$$(60) \qquad \eta = \frac{x_1\varphi_\zeta + \varphi_{p_1}}{x_2\varphi_\zeta + \varphi_{p_2}}, \qquad \sigma = \frac{x_2\varphi_\zeta + \varphi_{p_2}}{x_3\varphi_\zeta + \varphi_{p_3}},$$

or

$$(61) \qquad \eta = x_1\varphi_{p_2} - x_2\varphi_{p_1}, \qquad \sigma = x_2\varphi_{p_3} - x_3\varphi_{p_2},$$

according as the arbitrary function φ does or does not contain ζ.

Hence

$$(62) \qquad X_2 = \mu(\zeta, p_1, p_2, p_3, \eta, \sigma),$$

where μ is an arbitrary function.

Similarly if ν and λ are arbitrary functions

$$(63) \qquad X_3 = \nu(\zeta, p_1, p_2, p_3, \theta, \tau),$$

$$(64) \qquad X_1 = \lambda(\zeta, p_1, p_2, p_3, \xi, \rho),$$

where

$$(65) \qquad \theta = \frac{x_1\psi_\zeta + \psi_{p_1}}{x_2\psi_\zeta + \psi_{p_2}}, \quad \tau = \frac{x_2\psi_\zeta + \psi_{p_2}}{x_3\psi_\zeta + \psi_{p_3}}, \quad \psi_\zeta \neq 0,$$

$$(66) \qquad \theta = x_1\psi_{p_2} - x_2\psi_{p_1}, \quad \tau = x_2\psi_{p_3} - x_3\psi_{p_2}, \quad \psi_\zeta = 0,$$

$$(67) \qquad \xi = \frac{x_1\chi_\zeta + \chi_{p_1}}{x_2\chi_\zeta + \chi_{p_2}}, \quad \rho = \frac{x_2\chi_\zeta + \chi_{p_2}}{x_3\chi_\zeta + \chi_{p_3}}, \quad \chi_\zeta \neq 0,$$

$$(68) \qquad \xi = x_1\chi_{p_2} - x_2\chi_{p_1}, \quad \rho = x_2\chi_{p_3} - x_3\chi_{p_2}, \quad \chi_\zeta = 0.$$

The functions λ, μ, ν ought to be such as to satisfy the equations (36) and (38). It is easy to verify that if the seven functions X_i, P_i, Z satisfy the equations

(28), (34), (38), (45), (46),

they also satisfy simultaneously the equations

(36), (37), (39).

Then the problem of finding the forms of the functions Z, X_1, X_2, X_3 comes to that of determining the functions λ, μ, ν in such form that the equations (38) exist and of seeking a function Z related to the functions X_i, Z, P_i by the equations (45) and (46), that is, as we have seen, a function Z of such form that the function

$$T = \sum_{i=1}^{3} P_i X_i - Z$$

satisfies the equations (50) and (51).

If the functions

$$\xi,\ \eta,\ \theta,\ \rho,\ \sigma,\ \tau$$

be considered as functions of x_i, p_i, ζ, we have

$$(69)\quad \begin{array}{lll} 11 = \lambda_\xi \xi_{x_1} + \lambda_\rho \rho_{x_1}, & 12 = \lambda_\xi \xi_{x_2} + \lambda_\rho \rho_{x_2}, & 13 = \lambda_\xi \xi_{x_3} + \lambda_\rho \rho_{x_3}, \\ 21 = \mu_\eta \eta_{x_1} + \mu_\sigma \sigma_{x_1}, & 22 = \mu_\eta \eta_{x_2} + \mu_\sigma \sigma_{x_2}, & 23 = \mu_\eta \eta_{x_3} + \mu_\sigma \sigma_{x_3}, \\ 31 = \nu_\theta \theta_{x_1} + \nu_\tau \tau_{x_1}, & 32 = \nu_\theta \theta_{x_2} + \nu_\tau \tau_{x_2}, & 33 = \nu_\theta \theta_{x_3} + \nu_\tau \tau_{x_3}, \end{array}$$

since

$$(70)\qquad \zeta_{x_1} + p_1 \zeta_\zeta = \zeta_{x_2} + p_2 \zeta_\zeta = \zeta_{x_3} + p_3 \zeta_\zeta = 0.$$

Substituting the values (69) together with the following expressions for the (ij) 's

$$(71)\quad (11) = x_1 \varphi_\zeta + \varphi_{p_1},\ (12) = x_2 \varphi_\zeta + \varphi_{p_2},\ \ldots,\ (33) = x_3 \chi_\zeta + \chi_{p_3},$$

this result may be also established geometrically by observing that the equation (5) is that of all developable hypersurfaces in a space of $n + 1$ dimensions. It may be further remarked that in case the contact transformations considered degenerate into point transformations the arbitrary point transformation Q must be projective.

Princeton, New Jersey, U. S. A.

E. O. Lovett.

SULLA RICERCA DELLE FUNZIONI POLI-ARMONICHE IN UN'AREA PIANA SEMPLICEMENTE CONNESSA PER DATE CONDIZIONI AL CONTORNO.

Memoria del Dr. **Emilio Almansi**, in Torino.

Adunanza del 26 marzo 1899.

I.

1. Il procedimento che ora esporrò per integrare, in un'area piana semplicemente connessa, l'equazione differenziale $\Delta^4 = 0$, (*) quando al contorno si conosca il valore della funzione, e della sua derivata rispetto alla normale interna, permette di ottenere la funzione che si cerca, espressa per mezzo d'integrali definiti, ed è applicabile a tutte quelle aree, per le quali il parametro $f(z) = f(x + iy)$ della rappresentazione conforme sul cerchio, è un polinomio. Di tal natura, come vedremo, è l'area racchiusa da una *Lumaca di Pascal*, che non passi per il suo polo.

(*) Rappresento con Δ^4, Δ^6, etc., i simboli operatori $\Delta^2 \Delta^2$, $\Delta^2 \Delta^2 \Delta^2$, etc. $\left(\Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$. E chiamo bi-armoniche, tri-armoniche, ..., (n)-armoniche, od anche poli-armoniche d'ordine 2, 3, ..., n, le funzioni regolari, in una data area, insieme alle loro derivate, e che soddisfano rispettivamente alle equazioni differenziali: $\Delta^4 = 0$, $\Delta^6 = 0$, ..., $\Delta^{2n} = 0$.

Con un procedimento analogo si potrà anche integrare l'equazione più generale $\Delta^{2n} = 0$, conoscendosi al contorno il valore della funzione, e delle sue derivate normali dei primi $n-1$ ordini.

Questo metodo d'integrazione è basato sopra alcune proprietà delle funzioni poli-armoniche, che ho dimostrato in altra mia Memoria (*), e che qui ricordo brevemente.

2. Se u è una funzione armonica in un'area σ, semplicemente connessa, i cui punti siano riferiti ad un sistema di coordinate ortogonali x, y, esiste sempre una funzione u_1, pure armonica nell'area σ, e legata alla precedente dall'equazione:

(1) $$\frac{\partial u_1}{\partial x} = u.$$

Consideriamo infatti le due equazioni:

(2) $$\frac{\partial u'}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial u'}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

Esse, nell'area σ, definiscono (a meno di una costante), una nuova funzione armonica u', coniugata della u. In virtù della prima di queste formule, potremo porre:

$$u = \frac{\partial u_1}{\partial x}, \quad u' = \frac{\partial u_1}{\partial y},$$

essendo u_1 un'altra funzione, regolare nell'area σ. Dalla seconda delle formule (2) si deduce che la funzione u_1 è armonica. Resta così dimostrata l'esistenza di una funzione u_1, armonica nell'area σ, e che soddisfa all'equazione (1).

Analogamente, esisterà una funzione armonica u_2, legata alla u_1 dalla formula:

$$\frac{\partial u_2}{\partial x} = u_1,$$

(*) *Sull'integrazione dell'equazione differenziale* $\Delta^{2n} = 0$, Annali di Matematica, Tomo II, Serie III, 1898.

e quindi alla u dalla formula:

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} = u.$$

In generale, data la funzione armonica u, esisterà una funzione armonica u_{n-1}, che soddisfa all'equazione:

$$\frac{\partial^{n-1} u_{n-1}}{\partial x^{n-1}} = u.$$

Ciò premesso, si vuol dimostrare che qualunque funzione U, (n)-armonica nell'area σ, si può rappresentare con n funzioni armoniche

$$u_0, u_1, \ldots, u_{n-1},$$

mediante la formula:

$$U = x^{n-1} u_{n-1} + x^{n-2} u_{n-2} + \ldots + x u_1 + u_0. \text{ (*)}$$

Poniamo:

$$U = x^{n-1} u_{n-1} + U', \tag{3}$$

essendo u_{n-1} una funzione armonica, che potremo scegliere ad arbitrio, ed U' una funzione da determinarsi. La funzione $x^{n-1} u_{n-1}$ è (n)-armonica, come in generale qualunque funzione ottenuta moltiplicando una funzione armonica, per un polinomio $p(x, y)$ di grado $n - 1$.

Eseguendo sull'equazione (3) l'operazione $\Delta^{2(n-1)}$, si ottiene:

$$\Delta^{2(n-1)} U = A \frac{\partial^{n-1} u_{n-1}}{\partial x^{n-1}} + \Delta^{2(n-1)} U', \tag{4}$$

(*) Una formola di un tipo più generale, riguardo ai coefficienti delle funzioni armoniche, che qui ho supposto uguali a potenze della x, si trova dimostrata, per funzioni di tre variabili, nella Memoria che cito avanti. Ma la via che seguo per ottenerla, mi obbliga a fare, sulla natura del campo in cui è definita la funzione U, una restrizione che si può evitare.

ove A è un coefficiente costante, che vale $2^{n-1}(n-1)(n-2)\dots 2.1$. Indichiamo con u la funzione armonica $\frac{1}{A}\Delta^{2(n-1)}U$, e prendiamo la funzione armonica u_{n-1} in modo che soddisfi all'equazione:

$$\frac{\partial^{n-1} u_{n-1}}{\partial x^{n-1}} = u,$$

ciò che abbiamo visto potersi sempre fare. L'equazione (4) diventerà:

$$\Delta^{2(n-1)} U' = 0,$$

vale a dire che la funzione U' dovrà essere $(n-1)$-armonica.

Con una formula analoga alla (3) potremo porre:

$$U' = x^{n-2} u_{n-2} + U'',$$

essendo u_{n-2} una nuova funzione armonica, ed U'' una funzione $(n-2)$-armonica. Sarà dunque:

$$U = x^{n-1} u_{n-1} + x^{n-2} u_{n-2} + U''.$$

Proseguendo così arriveremo finalmente alla formula

$$U = x^{n-1} u_{n-1} + x^{n-2} u_{n-2} + \dots + x u_1 + u_0,$$

in cui tutte le funzioni $u_{n-1}, u_{n-2}, \dots, u_1, u_0$, saranno armoniche: ciò che appunto si voleva dimostrare.

In particolare, entro un'area piana semplicemente connessa, una funzione bi-armonica U si potrà sempre rappresentare con due funzioni armoniche u_0, u_1, ponendo:

$$U = x u_1 + u_0.$$

3. Una funzione U, (n)-armonica in un'area semplicemente connessa, si può anche rappresentare con n funzioni armoniche $v_0, v_1,$

$v_2, \ldots, v_{n-1}$ mediante la formula:

$$U = v_0 + r^2 v_1 + r^4 v_2 + \ldots + r^{2(n-1)} v_{n-1}, \quad (r^2 = x^2 + y^2)$$

dalla quale si passa facilmente all'altra:

$$(5) \quad U = w_0 + (r^2 - 1) w_1 + (r^2 - 1)^2 w_2 + \ldots + (r^2 - 1)^{2(n-1)} w_{n-1},$$

le $w_0, w_1, w_2, \ldots w_{n-1}$, essendo nuove funzioni armoniche.

In un'area circolare, nel cui centro si trovi l'origine delle coordinate, è evidente che qualunque funzione (n)-armonica U può mettersi sotto questa forma. Infatti si potranno sempre determinare le funzioni armoniche $w_0, w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}$, in modo che al contorno la funzione U, e le sue derivate normali dei primi $n - 1$ ordini, assumano valori dati ad arbitrio.

È precisamente in questo caso che noi faremo uso della formola (5).

4. Se v è una funzione armonica nell'area σ, anche la funzione:

$$(6) \qquad v_1 = x \frac{\partial v'}{\partial x} + y \frac{\partial v'}{\partial y} + h_1,$$

ove h_1 rappresenta una costante, è armonica nell'area σ.

Inversamente, data la funzione armonica v_1 si può sempre trovare una funzione, pure armonica, v', legata ad essa dalla formula (6). Osserviamo infatti che questa formula può anche scriversi:

$$(7) \qquad r \frac{\partial v'}{\partial r} = v_1 - h_1.$$

Supponiamo che l'origine delle coordinate si trovi nell'interno dell'area σ, e che ogni retta uscente dall'origine tagli il suo contorno in un sol punto. Una funzione definita in tutta l'area σ, e che soddisfa all'equazione (7), si avrà allora ponendo:

$$v' = \int_0^r \frac{v_1 - h_1}{r} dr.$$

E se per la costante h_1 si prende il valore che assume v_1 nell'origine delle coordinate la funzione v', così definita, sarà regolare in ogni punto di σ. Essa poi soddisfa, come è facile verificare, all'equazione $\Delta^2 = 0$. È dunque una funzione armonica: e si potrebbe anche dimostrare che nessun'altra funzione armonica verifica l'equazione (7).

Se la funzione v_1 è un polinomio, la funzione v' sarà un polinomio dello stesso grado.

Ora supponiamo che la funzione v_1 sia la derivata rispetto ad x della funzione armonica v. Si avrà, per la formula (6):

$$\frac{\partial v}{\partial x} = x\frac{\partial v'}{\partial x} + y\frac{\partial v'}{\partial y} + h_1.$$

Poniamo inoltre:

$$\frac{\partial v}{\partial y} = x\frac{\partial v'}{\partial y} - y\frac{\partial v'}{\partial x} + h_2, \tag{8}$$

essendo h_2 una funzione da determinarsi.

Derivando la prima delle equazioni (8) rispetto ad x, la seconda rispetto ad y, e sommando, si trova: $\frac{\partial h_2}{\partial y} = 0$. Invece derivando la prima rispetto ad y, la seconda rispetto ad x, e sottraendo, si ottiene: $\frac{\partial h_2}{\partial x} = 0$. La h_2 è dunque essa pure una costante.

Abbiamo così rappresentate le derivate prime della funzione armonica v, mediante le derivate prime di un'altra funzione armonica v', e le due costanti h_1, h_2.

In particolare, le derivate prime di un polinomio armonico $q(x, y)$, potremo rappresentarle per mezzo delle derivate prime di un altro polinomio armonico $q'(x, y)$, e due costanti c_1, c_2, ponendo:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x} &= x\frac{\partial q'}{\partial x} + y\frac{\partial q'}{\partial y} + c_1, \\ \frac{\partial q}{\partial y} &= x\frac{\partial q'}{\partial y} - y\frac{\partial q'}{\partial x} + c_2. \end{aligned}\right. \tag{9}$$

E se il polinomio q è di grado m, il polinomio q' sarà di grado $m - 1$.

Vedremo nei capitoli successivi l'utilità di queste formule, in rapporto ai problemi dei quali ci occupiamo.

II.

5. Sia σ' un'area piana, semplicemente connessa. Riferiti i suoi punti ad un sistema di coordinate ortogonali x', y', supponiamo che nelle formule

$$x' = p_1(x, y),$$
$$(10) \qquad y' = p_2(x, y),$$

le quali danno la rappresentazione conforme dell'area σ' sul cerchio σ, di raggio 1, appartenente al piano (xy), i secondi membri siano dei polinomi (armonici) di grado m. Converrà poi supporre che il determinante funzionale

$$D' = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial x'}{\partial y} \\ \frac{\partial y'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{vmatrix}$$

sia differente da o anche sul contorno dell'area σ'.

Diciamo U' la funzione armonica che si vuol determinare entro quest'area, conoscendosi al contorno il valore della funzione stessa, e della sua derivata rispetto alla normale interna ν'.

Si tratta di far vedere come la funzione U' possa sempre ottenersi espressa per mezzo d'integrali definiti.

Perciò rappresentiamo la funzione bi-armonica U' con due funzioni armoniche u'_1, u'_0, ponendo:

$$U' = x' u'_1 + u'_0.$$

Sieno U, u_1, u_0, le funzioni U', u'_1, u'_0, espresse mediante le variabili x, y. Si avrà nel cerchio σ del piano (xy):

$$(12) \qquad U = p_1(x, y) u_1 + u_0.$$

Le funzioni $u_1(x, y)$, $u_0(x, y)$ saranno ancora armoniche. E poichè il polinomio $p_1(x, y)$ si è supposto di grado m, la funzione $U(x, y)$ sarà $(m+1)$-armonica. Perciò si potrà rappresentare con $m+1$ funzioni armoniche, mediante la formula:

$$U = w_0 + (r^2 - 1)w_1 + (r^2 - 1)^2 w_2 + \dots + (r^2 - 1)^m w_m,$$

che scriveremo più semplicemente:

$$(13) \qquad U = w_0 + (r^2 - 1)w_1 + (r^2 - 1)^2 W,$$

indicando con W la funzione $(m-1)$-armonica:

$$w_2 + (r^2 - 1)w_3 + \dots + (r^2 - 1)^{m-2} w_m.$$

Supponiamo di esser riusciti, trasformando convenientemente l'equazione (12), a porre la funzione U sotto questa forma. Come sul contorno dell'area σ' si conosce il valore di U', e della sua derivata normale $\frac{\partial U'}{\partial \nu'}$, così sulla circonferenza del cerchio σ conosceremo U, e la sua derivata normale $\frac{\partial U}{\partial \nu}$. Tenendo conto di questi dati, ed osservando che il termine $(r^2 - 1)^2 W$, sulla circonferenza del cerchio, si annulla insieme alla sua derivata normale, potremo determinare in tutto il cerchio σ le due funzioni armoniche w_0, w_1, con un procedimento perfettamente analogo a quello che si seguirebbe per determinare, nella stessa area, la funzione bi-armonica $u = w_0 + (r^2 - 1)w_1$, conoscendosi al contorno il valore di u, e di $\frac{\partial u}{\partial \nu}$. Ma i valori assegnati al contorno per la funzione U, e per la sua derivata normale, determinano questa funzione in tutta l'area σ. In altri termini, la funzione, ancora incognita, W dovrà essere completamente determinata, quando si conoscono le due funzioni w_0, w_1. E se la relazione che lega queste funzioni risulterà tale che, nota la w_0 e la w_1, si possa effettivamente ricavare la W, il problema sarà risoluto.

Si tratta dunque di trasformare l'equazione

$$(14) \qquad U = p_1 u_1 + u_0,$$

ove p_1 rappresenta un polinomio armonico di grado m, in modo da ridurla alla forma (13).

6. Introduciamo una nuova funzione armonica v, ed un nuovo polinomio armonico q, legati rispettivamente alla funzione armonica u_1, e al polinomio armonico p_1, dalle formule:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = u_1, \quad 2\frac{\partial q}{\partial x} = p_1.$$

La funzione v sarà incognita, al pari della u_1. Il polinomio p_1 essendo noto, il polinomio q sarà noto, a meno di una funzione armonica della sola variabile y, ossia di una funzione lineare della y. Attribuiamo, alle due costanti che vi compariscono, valori arbitrarii, in modo che il polinomio q risulti completamente determinato.

La formula (14) diventerà:

$$U = 2\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + u_0,$$

od anche, aggiungendo e togliendo il termine $\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$:

$$U = \left[\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}\right] + \left[\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + u_0\right].$$

Ma la funzione $\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}$ è armonica, come si può facilmente verificare. Se dunque indichiamo con v_0 la funzione armonica chiusa nella seconda parentesi, sarà:

$$U = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + v_0.$$

Abbiamo così la funzione U espressa mediante il polinomio armonico noto q, che è di grado $m+1$, e le due funzioni armoniche incognite v e v_0.

Scriveremo più brevemente:

$$U = V + v_0, \tag{15}$$

ponendo:

$$V=\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}. \tag{16}$$

Cerchiamo di trasformare questa espressione della funzione V, in modo da ridurla all'altra:

$$V=v_1+(x^2+y^2)v_2+(x^2+y^2)^2v_3+\ldots+(x^2+y^2)^m v_{m+1}, \tag{17}$$

le funzioni $v_1, v_2, \ldots, v_{m+1}$, essendo armoniche. Dopo ciò sarà facile ottenere la funzione U sotto la forma voluta.

Per fare questa trasformazione ricorriamo alle formule (8) e (9) del § 4: poniamo cioè:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial x}=x\dfrac{\partial v'}{\partial x}+y\dfrac{\partial v'}{\partial y}+h_1, \\[2ex] \dfrac{\partial v}{\partial y}=x\dfrac{\partial v'}{\partial y}-y\dfrac{\partial v'}{\partial x}+h_2,\end{cases} \qquad \begin{cases}\dfrac{\partial q}{\partial x}=x\dfrac{\partial q'}{\partial x}+y\dfrac{\partial q'}{\partial y}+c_1, \\[2ex] \dfrac{\partial q}{\partial y}=x\dfrac{\partial q'}{\partial y}-y\dfrac{\partial q'}{\partial x}+c_2,\end{cases}$$

in cui v' è una nuova funzione armonica, incognita come la v, e h_1, h_2 sono costanti, pure incognite: q' è un polinomio armonico di grado m, noto a meno di una costante che non ha influenza, e c_1, c_2 sono costanti note.

La formula (16) può allora scriversi:

$$V=(x^2+y^2)\left[\frac{\partial q'}{\partial x}\frac{\partial v'}{\partial x}+\frac{\partial q'}{\partial y}\frac{\partial v'}{\partial y}\right]+$$
$$+(c_1x-c_2y)\frac{\partial v'}{\partial x}+(c_1y+c_2x)\frac{\partial v'}{\partial y}+h_1\frac{\partial q}{\partial x}+h_2\frac{\partial q}{\partial y}:$$

e ponendo:

$$V_1=\frac{\partial q'}{\partial x}\frac{\partial v'}{\partial x}+\frac{\partial q'}{\partial y}\frac{\partial v'}{\partial y}, \tag{18}$$

$$v_1=(c_1x-c_2y)\frac{\partial v'}{\partial x}+(c_1y+c_2x)\frac{\partial v'}{\partial y}+h_1\frac{\partial q}{\partial x}+h_2\frac{\partial q}{\partial y}, \tag{19}$$

si avrà:

$$(a) \qquad V = (x^2 + y^2) V_1 + v_1.$$

Dal confronto della formula (16) colla (18), si vede che la funzione V_1 ha un'espressione perfettamente analoga alla V, salvochè in essa comparisce la funzione v', in luogo della v, e il polinomio q', che è di grado m, in luogo del polinomio q, che è di grado $m + 1$.

Quanto alla funzione v_1, essa è armonica, come facilmente si verifica.

Ora facciamo sulla funzione V_1 una trasformazione analoga a quella fatta sulla V, ponendo:

$$(20) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial v'}{\partial x} = x \dfrac{\partial v''}{\partial x} + y \dfrac{\partial v''}{\partial y} + h'_1, \\[2ex] \dfrac{\partial v'}{\partial y} = x \dfrac{\partial v''}{\partial y} - y \dfrac{\partial v''}{\partial x} + h'_2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial q'}{\partial x} = x \dfrac{\partial q''}{\partial x} + y \dfrac{\partial q''}{\partial y} + c'_1, \\[2ex] \dfrac{\partial q'}{\partial y} = x \dfrac{\partial q''}{\partial y} - y \dfrac{\partial q''}{\partial x} + c'_2. \end{cases}$$

Si otterrà la formula:

$$(b) \qquad V_1 = (x^2 + y^2) V_2 + v_2,$$

in cui sarà:

$$(21) \qquad V_2 = \frac{\partial q''}{\partial x} \frac{\partial v''}{\partial x} + \frac{\partial q''}{\partial y} \frac{\partial v''}{\partial y},$$

$$(22) \quad v_2 = (c'_1 x - c'_2 y) \frac{\partial v''}{\partial x} + (c'_1 y + c'_2 x) \frac{\partial v''}{\partial y} + h'_1 \frac{\partial q'}{\partial x} + h'_2 \frac{\partial q'}{\partial y}.$$

Le formole (b), (21) e (22), sono analoghe alle (a), (18) e (19). Il polinomio q'' è di grado $m - 1$. La funzione v_2 è armonica.

Come abbiamo operato sulle funzioni V e V_1, potremo operare sulla funzione V_2, che assumerà la forma:

$$(c) \qquad V_2 = (x^2 + y^2) V_3 + v_3,$$

e così di seguito, finchè arriveremo alla formula:

$$(23) \qquad V_{m-1} = (x^2 + y^2) V_m + v_m,$$

in cui sarà:

$$(24) \qquad V_m = \frac{\partial q^{(m)}}{\partial x}\frac{\partial v^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial q^{(m)}}{\partial y}\frac{\partial v^{(m)}}{\partial y},$$

rappresentando $v^{(m)}$ una funzione armonica, e $q^{(m)}$ un polinomio armonico del primo grado, le cui derivate prime rispetto ad x e ad y sarannno dunque delle costanti, che indicheremo con A e B. Perciò la funzione V^m sarà armonica, al pari delle funzioni $v_1, v_2, \ldots, v_m$. Per uniformità di notazione indichiamola con v_{m+1}. La formula (24) diventerà allora:

$$(25) \qquad v_{m+1} = A\frac{\partial v^{(m)}}{\partial x} + B\frac{\partial v^{(m)}}{\partial y},$$

e la (23):

$$(z) \qquad V_{m-1} = (x^2 + y^2)v_{m+1} + v_m.$$

Combinando le formule (a), (b), (c), ..., (z), si ottiene:

$$(26) \quad V = v_1 + (x^2 + y^2)v_2 + (x^2 + y^2)^2 v_3 + \ldots + (x^2 + y^2)^m v_{m+1},$$

la qual formula non è altro che la (17).

7. Prima di andar più oltre nella trasformazione della funzione V, è necessario vedere sotto qual forma si presentano le funzioni armoniche $v_1, v_2, v_3, \ldots, v_{m-1}$.

Riprendiamo l'espressione della funzione v_1, data dalla formula (19). Si aveva:

$$v_1 = (c_1 x - c_2 y)\frac{\partial v'}{\partial x} + (c_1 y + c_2 x)\frac{\partial v'}{\partial y} + b_1\frac{\partial q}{\partial x} + b_2\frac{\partial q}{\partial y}.$$

Questa formula, ponendo:

$$\lambda_1' = c_1 xy + \frac{1}{2}c_2(x^2 - y^2), \quad \mu_1' = b_1\frac{\partial q}{\partial x} + b_2\frac{\partial q}{\partial y},$$

può anche scriversi:

$$(27) \qquad v_1 = \frac{\partial \lambda_1'}{\partial y}\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_1'}{\partial x}\frac{\partial v'}{\partial y} + \mu_1'.$$

I due polinomii λ'_1, μ'_1, sono armonici. Il primo è interamente noto, l'altro contiene le due costanti incognite h_1, h_2.

Ricordiamo che dopo aver ottenuta l'equazione $V=(x^2+y^2)V_1+v_1$, in cui si aveva $V_1 = \frac{\partial q'}{\partial x}\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial q'}{\partial y}\frac{\partial v'}{\partial y}$, abbiamo trasformata la funzione V_1, sostituendo a $\frac{\partial v'}{\partial x}$, $\frac{\partial v'}{\partial y}$, le loro espressioni, date dalle formule (20), nelle quali figurano le derivate prime della funzione v''. Se lo stesso facciamo per la funzione v_1, si otterrà:

$$v_1 = \left[x\frac{\partial \lambda'_1}{\partial y} - y\frac{\partial \lambda'_1}{\partial x}\right]\frac{\partial v''}{\partial x} + \left[x\frac{\partial \lambda'_1}{\partial x} + y\frac{\partial \lambda'_1}{\partial y}\right]\frac{\partial v''}{\partial y} + h'_1\frac{\partial \lambda'_1}{\partial y} + h'_2\frac{\partial \lambda'_1}{\partial x} + \mu'_1. \tag{28}$$

Ora è facile vedere che il secondo membro di questa equazione può ridursi identico, nella forma, al secondo membro della (27). Infatti, osservando che si ha:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[x\frac{\partial \lambda'_1}{\partial y} - y\frac{\partial \lambda'_1}{\partial x}\right] + \frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial \lambda'_1}{\partial x} + y\frac{\partial \lambda'_1}{\partial y}\right] = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[x\frac{\partial \lambda'_1}{\partial y} - y\frac{\partial \lambda'_1}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[x\frac{\partial \lambda'_1}{\partial x} + y\frac{\partial \lambda'_1}{\partial y}\right] = 0,$$

potremmo porre:

$$x\frac{\partial \lambda'_1}{\partial x} + y\frac{\partial \lambda'_1}{\partial y} = \frac{\partial \lambda''_1}{\partial x},$$

$$x\frac{\partial \lambda'_1}{\partial y} - y\frac{\partial \lambda'_1}{\partial x} = \frac{\partial \lambda''_1}{\partial y},$$

ove λ''_1 sarà un nuovo polinomio armonico. Poniamo inoltre:

$$h'_1\frac{\partial \lambda'_1}{\partial y} + h'_2\frac{\partial \lambda'_1}{\partial x} + \mu'_1 = \mu''_1.$$

Il polinomio armonico μ_1'' conterrà le quattro costanti incognite b_1, b_2, b_1', b_2'.

La formula (27) diventerà allora:

$$v_1 = \frac{\partial \lambda_1''}{\partial y}\frac{\partial v''}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_1''}{\partial x}\frac{\partial v''}{\partial y} + \mu_1''.$$

Questa equazione è analoga alla (27). Così dunque resta dimostrato che quando, per mezzo delle formule (20), si passa dalla funzione v' alla funzione v'', la funzione v_1 conserva la forma primitiva.

Lo stesso avverrà quando dalla funzione v'', mediante formule analoghe alle (20), si passa successivamente alle funzioni $v''', v^{IV}, \dots, v^{(m)}$. Onde arriveremo finalmente alla formula:

$$v_1 = \frac{\partial \lambda_1^{(m)}}{\partial y}\frac{\partial v^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_1^{(m)}}{\partial x}\frac{\partial v^{(m)}}{\partial y} + \mu_1^{(m)},$$

in cui $\lambda_1^{(m)}$ e $\mu_1^{(m)}$ rappresenteranno dei polinomii armonici, il primo dei quali sarà noto (a meno di una costante che non ha influenza), l'altro conterrà le $2m$ costanti arbitrarie:

(29) $$b_1,\ b_2,\ b_1',\ b_2',\ \dots,\ b_1^{(m-1)},\ b_2^{(m-1)}.$$

Quello che si è detto per la funzione v_1, può ripetersi per la funzione v_2. Essa è data dalla formula (22), che, ponendo:

$$\lambda_2'' = c_1' xy + \frac{1}{2} c_2'(x^2 - y^2), \quad \mu_2'' = b_1' \frac{\partial q'}{\partial x} + b_1' \frac{\partial q'}{\partial y},$$

potrà scriversi:

$$v_2 = \frac{\partial \lambda_2''}{\partial y}\frac{\partial v''}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_2''}{\partial x}\frac{\partial v''}{\partial y} + \mu_2''.$$

Da questa formula si passerà successivamente ad altre, che conterranno le derivate prime delle funzioni $v''', v^{IV}, \dots, v^{(m)}$, l'ultima delle quali sarà:

$$v_2 = \frac{\partial \lambda_2^{(m)}}{\partial y}\frac{\partial v^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_2^{(m)}}{\partial x}\frac{\partial v^{(m)}}{\partial y} + \mu_2^{(m)}.$$

Analogamente troveremo:

$$v_3 = \frac{\partial \lambda_3^{(m)}}{\partial y} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_3^{(m)}}{\partial x} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial y} + \mu_3^{(m)},$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$v_m = \frac{\partial \lambda_m^{(m)}}{\partial y} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_m^{(m)}}{\partial x} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial y} + \mu_m^{(m)}.$$

Così avremo espresse le m funzioni armoniche $v_1, v_2, v_3, \dots, v_m$, mediante le derivate prime dell'unica funzione armonica $v^{(m)}$. I coefficienti di queste derivate sono polinomii noti. Invece nei polinomii $\mu_1^{(m)}$, $\mu_2^{(m)}, \dots, \mu_m^{(m)}$, figurano le $2m$ costanti incognite (29). Si osservi che di esse le prime due compariscono soltanto nel polinomio μ_1'. Nei rimanenti polinomii compariscono le $2m - 2$ costanti $h_1', h_2', \dots, h_1^{(m-1)}$, $h_2^{(m-1)}$, il cui insieme, per brevità indicheremo con (c).

Nell'equazione (26), oltre alle m funzioni armoniche sopra considerate, figura la funzione armonica v_{m+1} (da prima indicata con V_m).

Essa è data dalla formula (25):

$$v_{m+1} = A\frac{\partial v^{(m)}}{\partial x} + B\frac{\partial v^{(m)}}{\partial y},$$

ove A e B sono costanti. Poniamo:

$$\lambda_{m+1}^{(m)} = Ay + Bx,$$

e indichiamo con $\mu_{m+1}^{(m)}$ una quantità identicamente nulla. Si avrà allora:

$$v_{m+1} = \frac{\partial \lambda_{m+1}^{(m)}}{\partial y} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_{m+1}^{(m)}}{\partial x} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial y} + \mu_{m+1}^{(m)};$$

vale a dire, si avrà la funzione v_{m+1} espressa da una formula perfettamente analoga a quelle trovate per le funzioni $v_1, v_2, \dots, v_m$. Se dunque indichiamo con v_i una qualunque delle funzioni armoniche v_1, $v_2, \dots, v_{m+1}$, che figurano nella formola (26), sarà:

$$v_i = \frac{\partial \lambda_i^{(m)}}{\partial y} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_i^{(m)}}{\partial x} \frac{\partial v^{(m)}}{\partial y} + \mu_i^{(m)}.$$

Per semplicità possiamo togliere l'indice (m), comune a tutti i polinomii armonici λ_i e μ_i, e inoltre indicare con w la funzione armonica v^m. Sarà allora:

$$v_i = \frac{\partial \lambda_i}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_i}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + \mu_i. \tag{30}$$

8. Riprendiamo la formula (26), che scriveremo:

$$\Gamma = v_1 + r^2 v_2 + r^4 v_3 + \dots + r^{2m} v_{m+1}.$$

Avendosi identicamente:

$$r^2 = (r^2 - 1) + 1$$

$$r^4 = (r^2 - 1)^2 + 2(r^2 - 1) + 1,$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$r^{2m} = (r^2 - 1)^m + m(r^2 - 1)^{m-1} + \dots + m(r^2 - 1) + 1,$$

sarà anche:

$$\Gamma = [v_1 + v_2 + \dots + v_{m+1}] + (r^2 - 1)[v_2 + 2v_3 + \dots + m v_{m+1}]$$
$$+ \dots + (r^2 - 1)^{m-1}[v_m + m v_{m+1}] + (r^2 - 1)^m v_{m+1};$$

o, più brevemente:

$$\Gamma = w_0 + (r^2 - 1) w_1 + (r^2 - 1)^2 w_2 + \dots + (r^2 - 1)^m w_m,$$

le $w_0, w_1, w_2, \dots, w_m$ rappresentando delle nuove funzioni armoniche, lineari rispetto alle $v_1, v_2, \dots, v_{m+1}$. Notiamo che la w_i contiene soltanto le funzioni $v_{i+1}, v_{i+2}, \dots, v_{m+1}$. In particolare si ha:

$$w_1 = v_2 + 2v_3 + \dots + m v_{m+1}. \tag{31}$$

Torniamo ora alla funzione U, data dalla formula (15). Si aveva:

$$U = \Gamma + v_0.$$

Se dunque indichiamo con w_0 la funzione armonica $v_0 + w'$, e inoltre poniamo:

$$W = w_2 + (r^2 - 1)w_3 + \ldots + (r^2 - 1)^{m-1} w_m,$$

sarà:

$$(32) \qquad U = w_0 + (r^2 - 1)w_1 + (r^2 - 1)^2 W,$$

la qual formula appunto ci eravamo proposti di ottenere.

Vediamo come sono espresse le funzioni w_1 e W. Dalle formule (30) e (31) si deduce:

$$w_1 = \left[\frac{\partial \lambda_2}{\partial y} + 2\frac{\partial \lambda_3}{\partial y} + \ldots + m\frac{\partial \lambda_{m+1}}{\partial y}\right]\frac{\partial w}{\partial x}$$
$$+ \left[\frac{\partial \lambda_2}{\partial x} + 2\frac{\partial \lambda_3}{\partial x} + \ldots + m\frac{\partial \lambda_{m+1}}{\partial x}\right]\frac{\partial w}{\partial y} + [\mu_2 + 2\mu_3 + \ldots + m\mu_{m+1}].$$

Quindi, ponendo:

$$\lambda_2 + 2\lambda_3 + \ldots + m\lambda_{m+1} = \lambda,$$

$$\mu_2 + 2\mu_3 + \ldots + m\mu_{m+1} = \mu,$$

si avrà:

$$(33) \qquad w_1 = \frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + \mu,$$

ove λ rappresenta un polinomio armonico noto (a meno di una costante additiva), e μ un polinomio pure armonico, in cui figurano le $2m - 2$ costanti indicate con (c).

Quanto alla W, essa contiene linearmente le funzioni $w_2, w_3, \ldots, w_m$, e quindi le funzioni $v_3, v_4, \ldots, v_{m+1}$. Sarà per conseguenza rappresentata da una formula del tipo:

$$W = L\frac{\partial w}{\partial x} + L'\frac{\partial w}{\partial y} + M,$$

in cui L ed L' saranno dei polinomii noti, mentre M conterrà le costanti incognite che compariscono nelle funzioni $v_3, v_4, \ldots, v_{m+1}$, ossia nei polinomi armonici $\mu_3, \mu_4, \ldots, \mu_{m+1}$. Queste costanti le indicheremo con (c').

La formula (32), sostituendo a w_1 e W le loro espressioni, possiamo anche scriverla:

$$(34) \qquad U = w_0 + (r^2 - 1)\left[\frac{\partial \lambda}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial \lambda}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + \mu\right] + (r^2 - 1)^2\left[L\frac{\partial w}{\partial x} + L'\frac{\partial w}{\partial y} + M\right].$$

Così dunque, partendo dalla formula (14), che ci esprimeva la funzione U per mezzo delle due funzioni armoniche u_0 ed u_1, siamo arrivati alla formula (34), che ci esprime la stessa funzione per mezzo delle due nuove funzioni armoniche w_0 e w, e di un certo numero di costanti da determinarsi, contenute nei polinomii μ ed M.

Questa trasformazione della funzione U, basata quasi esclusivamente sull'uso delle formule (8) e (9), richiede un numero di operazioni tanto più grande, quanto maggiore è il grado del primitivo polinomio p_1; ma non presenta, in nessun caso, alcuna difficoltà. Tutto si riduce, in ultima analisi, a trovare l'espressione dei due polinomii armonici λ e μ, e dei tre polinomii, in generale non armonici, L, L' ed M.

Osserviamo che, se si prescinde dalle condizioni a cui deve soddisfare, al contorno, la funzione U, le due funzioni armoniche w_0 e w e le costanti (c), che figurano nella formula (34), restano completamente arbitrarie, nel senso che alla funzione U, come è data da quella formula, corrisponde sempre nel piano (x', y') una funzione U' bi-armonica: e infatti sarebbe facile vedere che dalla formula (34) si può sempre risalire alla (14) ripetendo, in ordine inverso, le operazioni fatte per arrivare dalla (14) alla (34). In altri termini le due funzioni armoniche w_0 e w, e le costanti (c), non devono soddisfare ad altre condizioni, oltre a quelle che si trovano, obbligando la funzione U, e la sua derivata normale $\frac{\partial U}{\partial \nu}$ ad assumere, sulla circonferenza del cerchio σ, i valori assegnati.

Ma, come abbiamo già veduto al § 5, tenendo conto di questi dati, si vengono a conoscere, in tutto il cerchio σ, le due funzioni armoniche w_0 e w_1, l'ultima delle quali è legata alla funzione w, e alle costanti (c), contenute nel polinomio μ, dalla equazione (33), che scriveremo:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}=w_1-\mu. \tag{35}$$

Possiamo dunque concludere che, ottenuta la funzione w_1, per determinare la funzione w e le costanti (c), dovremo tener conto di quest'unica equazione; dalla quale basterà, evidentemente, che si possano ricavare le derivate prime della funzione w, e quelle tra le costanti (c), che compariscono nel polinomio M, vale a dire le costanti indicate con (c'): giacchè allora la formula (34) ci darà la funzione U, che si tratta appunto di determinare: e il problema sarà risoluto.

9. Dall'equazione (35) possiamo dedurne un'altra, nel modo seguente. Poniamo:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}-\frac{\partial\lambda}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}=w_1'-\mu', \tag{36}$$

in cui la funzione w_1' sia legata alla w_1 dalle formule:

$$\frac{\partial w_1'}{\partial x}=\frac{\partial w_1}{\partial y},\quad \frac{\partial w_1'}{\partial y}=-\frac{\partial w_1}{\partial x}, \tag{37}$$

e la μ' sia una funzione da determinarsi. La w_1' è nota a meno di una costante, a cui attribuiremo un valore arbitrario.

È facile vedere che formule analoghe alle (37) legano le due funzioni μ e μ'. Infatti deriviamo l'equazione (35) rispetto ad x, la (36) rispetto ad y, e sommiamo membro a membro. Si otterrà [ricordando che le funzioni λ e μ sono armoniche, e tenendo presenti le formule (37)]:

$$\frac{\partial\mu}{\partial x}+\frac{\partial\mu'}{\partial y}=0.$$

Derivando dunque la (35) rispetto ad y, la (36) rispetto ad x, e sottraendo, otterremo:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \mu'}{\partial x} = 0.$$

La funzione μ' è dunque un polinomio armonico, coniugato del polinomio μ. In esso, oltre alle costanti [illegible], comparirà una nuova costante arbitraria che diremo h.

Le equazioni (35) e (36) possiamo ora risolverle rispetto a $\frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y}$; se ne ricava:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{(w_1 - \mu)\frac{\partial \lambda}{\partial y} - (w'_1 - \mu')\frac{\partial \lambda}{\partial x}}{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{(w_1 - \mu)\frac{\partial \lambda}{\partial x} + (w'_1 - \mu')\frac{\partial \lambda}{\partial y}}{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2}.$$

I secondi membri di queste due equazioni rappresentano effettivamente le derivate, rispetto ad x e ad y, di una funzione che soddisfa all'equazione $\Delta^2 = 0$. Se infatti li indichiamo, per brevità, colle lettere ξ, η, si ottengono, come è facile verificare, le due equazioni:

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

ciò che prova l'asserto.

Affinchè poi le due funzioni ξ ed η, ossia $\frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y}$, non diventino infinite in nessun punto del cerchio σ, bisognerà attribuire alle costanti [illegible] ed h, che compariscono nei polinomii μ e μ', valori tali,

Derivando invece la (35) rispetto ad y, la (36) rispetto ad x, e sottraendo, otterremo:

$$\frac{\partial \mu}{\partial y} - \frac{\partial \mu'}{\partial x} = 0.$$

La funzione μ' è dunque un polinomio armonico, coniugato del polinomio μ. In esso, oltre alle costanti (c), comparirà una nuova costante arbitraria, che diremo b.

Le equazioni (35) e (36) possiamo ora risolverle rispetto a $\frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y}$; se ne ricava:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{(w_1 - \mu)\frac{\partial \lambda}{\partial y} - (w'_1 - \mu')\frac{\partial \lambda}{\partial x}}{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{(w_1 - \mu)\frac{\partial \lambda}{\partial x} + (w'_1 - \mu')\frac{\partial \lambda}{\partial y}}{\left(\frac{\partial \lambda}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)^2}.$$

I secondi membri di queste due equazioni rappresentano effettivamente le derivate, rispetto ad x e ad y, di una funzione che soddisfa all'equazione $\Delta^2 = 0$. Se infatti li indichiamo, per brevità, colle lettere ξ, η, si ottengono, come è facile verificare, le due equazioni:

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x}, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} = -\frac{\partial \eta}{\partial y},$$

ciò che prova l'asserto.

Affinchè poi le due funzioni ξ ed η, ossia $\frac{\partial w}{\partial x}$ e $\frac{\partial w}{\partial y}$, non diventino infinite in nessun punto del cerchio σ, bisognerà attribuire alle costanti (c) ed b, che compariscono nei polinomii μ e μ', valori tali,

che in quei punti del cerchio, in cui si ha:

$$\frac{\partial\lambda}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial\lambda}{\partial y}=0,$$

sia anche:

$$w_1-\mu=0, \quad w'_1-\mu'=0.$$

Tenendo conto di queste condizioni, tutte le quantità che figurano nella formula (34) dovranno risultare determinate: e quindi sarà determinata la funzione U.

III.

10. Per dare un esempio di questo metodo d'integrazione dell'equazione differenziale $\Delta^4=0$, supponiamo che l'area σ', appartenente al piano $(x'y')$, sia quella racchiusa da una *Lumaca di Pascal*, non passante per il suo polo.

Abbiasi dunque un cerchio, e sia P un punto della sua circonferenza. Sul prolungamento di ogni retta PP' uscente dal punto P, a partire dal punto P', in cui la retta incontra di nuovo la circonferenza, si prenda un segmento $P'M$, di lunghezza costante, maggiore del diametro del cerchio. Il punto M descrive allora una *Lumaca di Pascal*, che non passa per il polo P. Sia σ' l'area racchiusa da questa linea.

Per semplicità, assumeremo il segmento costante $P'M$ come unità di lunghezza. Detto a il raggio del cerchio, dovrà essere allora:

$$a<\frac{1}{2}.$$

La curva che si considera, in coordinate polari ρ, θ, prendendo il punto P come polo, e il diametro passante per P come asse polare, avrà l'equazione:

$$\rho=2a\cos\theta+1.$$

Se dunque prendiamo come origine delle coordinate ortogonali x', y',

il punto O', situato sull'asse polare, alla distanza a del polo, sarà:

$$x' = (2a\cos\theta + 1)\cos\theta - a,$$
$$y' = (2a\cos\theta + 1)\operatorname{sen}\theta,$$

ovvero:

$$(38) \qquad \begin{aligned} x' &= \cos\theta + a\cos 2\theta, \\ y' &= \operatorname{sen}\theta + a\operatorname{sen} 2\theta. \end{aligned}$$

Il contorno dell'area σ' si otterrà facendo variare in queste formule il parametro θ, fra 0 e 2π.

Per avere la rappresentazione conforme dell'area σ' sul cerchio σ, di raggio 1, appartenente al piano (xy), e col centro nell'origine delle coordinate, basta porre:

$$(39) \qquad \begin{aligned} x' &= x + a(x^2 - y^2), \\ y' &= y + 2axy. \end{aligned}$$

Infatti, se riferiamo i punti del cerchio σ, alle coordinate polari r, θ, assumendo come polo il centro del cerchio, e come asse polare l'asse x, si avrà:

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\operatorname{sen}\theta,$$

e le formule (39) potremo scriverle:

$$x' = r\cos\theta + ar^2\cos 2\theta,$$
$$y' = r\operatorname{sen}\theta + ar^2\operatorname{sen} 2\theta.$$

Facendo in queste formule $r = 1$, si ottengono le (38): vale a dire che alla circonferenza del cerchio σ, corrisponde il contorno dell'area σ'. Sono poi verificate le equazioni:

$$\frac{\partial x'}{\partial x} - \frac{\partial y'}{\partial y} = 0,$$
$$\frac{\partial x'}{\partial y} + \frac{\partial y'}{\partial x} = 0;$$

e finalmente il determinante funzionale:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial x} & \frac{\partial y'}{\partial x} \\ \frac{\partial x'}{\partial y} & \frac{\partial y'}{\partial y} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial x'}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x'}{\partial y}\right)^2 = (1 + 2ax)^2 + (2ay)^2,$$

essendo, per ipotesi, $a < \frac{1}{2}$, non può annullarsi in nessun punto del cerchio.

Ora le formule (39) non sono che un caso particolare delle (10). Se dunque vogliamo integrare, nell'area speciale che qui si considera, l'equazione $\Delta^4 U' = 0$, conoscendosi al contorno il valore della funzione bi-armonica U', e della sua derivata normale, potremo applicare il procedimento esposto in generale, per qualunque area σ', la cui rappresentazione conforme sul cerchio σ, si faccia mediante le formule (10), in cui i secondi membri sono polinomi.

Cominciamo a porre:

$$U' = x' u'_1 + u'_0,$$

essendo u'_1 ed u'_0 funzioni armoniche da determinarsi.

Nel piano (xy) sarà:

$$U = p_1 u_1 + u_0, \tag{40}$$

ove $p_1 = x'$, ossia:

$$p_1 = x + a(x^2 - y^2).$$

Le due funzioni $u_1(x, y)$ ed $u_0(x, y)$ sono armoniche. Il polinomio p_1 è di 2° grado. La funzione $U(x, y)$ sarà dunque tri-armonica, e potremo per conseguenza ridurla alla forma:

$$U = w_0 + (r^2 - 1) w_1 + (r^2 - 1)^2 w_2, \tag{41}$$

le funzioni w_0, w_1, w_2 essendo armoniche. Si tratta appunto di fare questa trasformazione.

Perciò poniamo:

$$\frac{\partial v}{\partial x} = u_1, \quad 2\frac{\partial q}{\partial x} = p_1,$$

ove la v sia una nuova funzione armonica, e q un polinomio armonico al pari di p_1. Potremo assumere:

$$q = \frac{1}{4}(x^2 - y^2) + \frac{1}{2}a\left(\frac{x^3}{3} - xy^2\right). \tag{42}$$

Sarà allora, sostituendo nella formula (40) a p_1 ed u_1 le loro espressioni:

$$U = 2\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + u_0,$$

od anche:

$$U = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + v_0,$$

in cui v_0 rappresenta la funzione armonica $\frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + u_0$, incognita come u_0 e v: e, più semplicemente:

$$U = V + v_0, \tag{43}$$

ove:

$$V = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Si deve ora trasformare la funzione V. Perciò poniamo:

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial x} &= x\frac{\partial v'}{\partial x} + y\frac{\partial v'}{\partial y} + h_1, \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= x\frac{\partial v'}{\partial y} - y\frac{\partial v'}{\partial x} + h_2, \end{aligned}\right. \tag{44}$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial x} &= x\frac{\partial q'}{\partial x} + y\frac{\partial q'}{\partial y} + c_1, \\ \frac{\partial q}{\partial y} &= x\frac{\partial q'}{\partial y} - y\frac{\partial q'}{\partial x} + c_2, \end{aligned}\right. \tag{44'}$$

essendo v' una nuova funzione armonica, e q' un polinomio armonico.

Si otterrà:

$$(45)\qquad V=(x^2+y^2)\left[\frac{\partial q'}{\partial x}\frac{\partial v'}{\partial x}+\frac{\partial q'}{\partial y}\frac{\partial v'}{\partial y}\right]+v_1.$$

La v_1 è una funzione armonica, della cui espressione è inutile tener conto, giacchè nella formula (43), che dà la funzione U, essa viene a sommarsi coll'altra funzione armonica incognita v_0.

Determiniamo $\frac{\partial q'}{\partial x}$ e $\frac{\partial q'}{\partial y}$. Le formule (44'), sostituendo a q la sua espressione, data dalla formula (42), potremo scriverle:

$$x\frac{\partial q'}{\partial x}+y\frac{\partial q'}{\partial y}=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}a(x^2-y^2)-c_1,$$

$$x\frac{\partial q'}{\partial y}-y\frac{\partial q'}{\partial x}=-\frac{1}{2}y-axy-c_2.$$

Facendo $x=0$, $y=0$, vediamo che le costanti c_1, c_2, devono esser nulle. Risolvendo poi rispetto a $\frac{\partial q'}{\partial x}$ e $\frac{\partial q'}{\partial y}$, otteniamo:

$$(46)\qquad \frac{\partial q'}{\partial x}=\frac{1}{2}(ax+1),\quad \frac{\partial q'}{\partial y}=-\frac{1}{2}ay$$

Nella formula (45), che scriveremo:

$$(47)\qquad V=(x^2+y^2)V_1+v_1,$$

essendo

$$V_1=\frac{\partial q'}{\partial x}\frac{\partial v'}{\partial x}+\frac{\partial q'}{\partial y}\frac{\partial v'}{\partial y},$$

possiamo trasformare la funzione V_1, come abbiamo trasformato la funzione V. Perciò poniamo:

$$(48)\begin{cases}\dfrac{\partial v'}{\partial x}=x\dfrac{\partial w}{\partial x}+y\dfrac{\partial w}{\partial y}+h_1', \\[2ex] \dfrac{\partial v'}{\partial y}=x\dfrac{\partial w}{\partial y}-y\dfrac{\partial w}{\partial x}+h_2'\end{cases}\qquad (48')\begin{cases}\dfrac{\partial q'}{\partial x}=x\dfrac{\partial q''}{\partial x}+y\dfrac{\partial q''}{\partial y}+c_1', \\[2ex] \dfrac{\partial q'}{\partial y}=x\dfrac{\partial q''}{\partial y}-y\dfrac{\partial q''}{\partial x}+c_2'.\end{cases}$$

La funzione armonica w, e le due costanti b'_1 ed b'_2 sono incognite. Avremo:

$$(49)\qquad \begin{aligned} V_1 = (x^2+y^2)\left[\frac{\partial q''}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial q''}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right] \\ + c'_1\left[x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}+b'_1\right]+c'_2\left[x\frac{\partial w}{\partial y}-y\frac{\partial w}{\partial x}+b'_2\right] \\ + b'_1\frac{\partial q'}{\partial x}+b'_2\frac{\partial q'}{\partial y}. \end{aligned}$$

Per determinare le derivate del polinomio q'', e le costanti c'_1, c'_2, riprendiamo le formule (48'). Sostituendo a $\frac{\partial q'}{\partial x}$, $\frac{\partial q'}{\partial y}$, i loro valori dati dalle (46), si ha:

$$x\frac{\partial q''}{\partial x}+y\frac{\partial q''}{\partial y}=\frac{1}{2}(ax+1)-c'_1,$$

$$x\frac{\partial q''}{\partial y}-y\frac{\partial q''}{\partial x}=-\frac{1}{2}ay-c'_2.$$

Facendo in queste formule $x=0$, $y=0$, si ricava:

$$c'_1=\frac{1}{2},\quad c'_2=0;$$

e risolvendo rispetto a $\frac{\partial q''}{\partial x}$ e $\frac{\partial q''}{\partial y}$:

$$\frac{\partial q''}{\partial x}=\frac{1}{2}a,\quad \frac{\partial q''}{\partial y}=0.$$

Perciò la formula (49), se in luogo di $\frac{\partial q'}{\partial x}$, $\frac{\partial q'}{\partial y}$, $\frac{\partial q''}{\partial x}$, $\frac{\partial q''}{\partial y}$, c'_1, c'_2, poniamo i valori trovati, diventerà:

$$\begin{aligned} V_1 = (x^2+y^2)\frac{1}{2}a\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{1}{2}\left[x\frac{\partial w}{\partial x}+y\frac{\partial w}{\partial y}+b'_1\right] \\ + \frac{1}{2}b'_1(ax+1)-\frac{1}{2}b'_2ay, \end{aligned}$$

ossia

$$(50) \qquad V_1 = (x^2 + y^2)v_3 + v_2,$$

le due funzioni

$$(51) \qquad \begin{cases} v_3 = \dfrac{1}{2} a \dfrac{\partial w}{\partial x} \\[2ex] v_2 = \dfrac{1}{2}\left[x\dfrac{\partial w}{\partial x} + y\dfrac{\partial w}{\partial y} + b'_1\right] + \dfrac{1}{2}\, b'_1(ax+1) - \dfrac{1}{2}\, b'_2 a y, \end{cases}$$

essendo armoniche.

Se ora combiniamo la formula (47) colla (50), otterremo:

$$V = (x^2 + y^2)^2 v_3 + (x^2 + y^2) v_2 + v_1,$$

che si può anche scrivere:

$$V = (v_1 + v_2 + v_3) + (r^2 - 1)(2v_3 + v_2) + (r^2 - 1)^2 v_3.$$

Quindi sarà, per la (43):

$$U = (v_0 + v_1 + v_2 + v_3) + (r^2 - 1)(2v_3 + v_2) + (r^2 - 1)^2 v_3,$$

o più semplicemente

$$(52) \qquad U = w_0 + (r^2 - 1) w_1 + (r^2 - 1)^2 w_2,$$

in cui w_0 rappresenta la funzione armonica $v_0 + v_1 + v_2 + v_3$; e inoltre si ha:

$$w_1 = 2v_3 + v_2, \quad w_2 = v_3,$$

ossia, per le formule (51):

$$(53) \quad w_1 = \frac{1}{2}\left[(2a + x)\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} + a(b'_1 x - b'_2 y) + 2b'_1\right],$$

$$(54) \qquad w_2 = \frac{1}{2} a \frac{\partial w}{\partial x}.$$

Così abbiamo posto la funzione U sotto la forma (41). Essa contiene le due funzioni armoniche incognite w_0 e w (la seconda delle quali figura in w_1 e w_2), e le due costanti, pure incognite, b'_1 ed b'_2.

Ora, tenendo conto dei valori che assume sulla circonferenza del cerchio σ, la funzione U, e la sua derivata rispetto alla normale interna $\frac{\partial U}{\partial \nu}$, potremo determinare le due funzioni armoniche w_0 e w_1. Sia per $r = 1$:

$$U = \varphi, \qquad \frac{\partial U}{\partial \nu} = \psi,$$

la φ e la ψ essendo funzioni note dell'angolo θ. Se ad U sostituiamo la sua espressione, data dalla formula (52), otterremo:

$$(55) \qquad [w_0]_{r=1} = \varphi, \qquad \left[\frac{\partial w_0}{\partial r} + 2 r w_1\right]_{r=1} = -\psi,$$

E poichè la funzione w_0 è armonica, sarà, per una nota formula, nel punto del cerchio di coordinate r, θ:

$$(56) \qquad w_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2)\varphi(\alpha)}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \alpha)}\, d\alpha.$$

La seconda delle formule (55) può scriversi:

$$\left[r\frac{\partial w_0}{\partial r} + 2 w_1\right]_{r=1} = -\psi.$$

L'espressione in parentesi rappresenta, come w_0 e w_1, una funzione armonica. Perciò nel punto di coordinate r, θ, si avrà con una formula analoga alla (56):

$$r\frac{\partial w_0}{\partial r} + 2 w_1 = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2)\psi(\alpha)}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \alpha)}\, d\alpha,$$

e risolvendo rispetto a w_1:

$$w_1 = -\frac{1}{2} r\frac{\partial w_0}{\partial r} - \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \frac{(1 - r^2)\psi(\alpha)}{1 + r^2 - 2r\cos(\theta - \alpha)}\, d\alpha.$$

Le due funzioni armoniche w_0 e w_1 restano così determinate.

11. Riprendiamo ora l'equazione (53), che scriveremo:

$$(x + 2a)\frac{\partial w}{\partial x} + y\frac{\partial w}{\partial y} = 2w_1 - a(h'_1 x - h'_2 y) - 2h'_1. \tag{57}$$

Questa non è altro che l'equazione (35) trovata nel caso generale. Essa deve bastare a farci conoscere quello che resta ancora d'incognito nella formula (52), vale a dire la funzione armonica w_2, che è data da

$$\frac{1}{2}a\frac{\partial w}{\partial x}.$$

Noi potremmo seguire il metodo esposto in generale, cominciando dal costruire l'altra equazione, analoga alla (36),

$$(x + 2a)\frac{\partial w}{\partial y} - y\frac{\partial w}{\partial x} = 2w'_1 + a(h'_1 y + h'_2 x) - 2h,$$

in cui w'_1 sia una nuova funzione armonica, legata alla w_1 dalle formule:

$$\frac{\partial w'_1}{\partial x} = \frac{\partial w_1}{\partial y}, \quad \frac{\partial w'_1}{\partial y} = -\frac{\partial w_1}{\partial x},$$

che si otterrà ponendo $w'_1 = \int_0^r \frac{\partial w_1}{\partial \theta}\, dr$, ed h una costante; e proseguendo come è indicato al § 9.

Ma in questo caso speciale si arriva più rapidamente allo scopo, per una via diversa.

Osserviamo, innanzi tutto, che nel punto O_1, di coordinate

$$x = -2a, \quad y = 0,$$

che appartiene al cerchio σ, essendo per ipotesi $a < \frac{1}{2}$, il primo membro dell'equazione (57) si annulla. Dovrà dunque annullarsi anche il secondo: vale a dire, se indichiamo con α_1 il valore della funzione w_1

nel punto O_1, dovrà essere:

$$2\alpha_1 + 2a^2 b'_1 - 2b'_1 = 0,$$

da cui si deduce:

$$b'_1 = \frac{\alpha_1}{1 - a^2}.$$

La costante b'_1 è così determinata.

Ciò fatto, deriviamo l'uno e l'altro membro dell'equazione (57) rispetto ad x. Si ottiene, sostituendo ad b'_1 il valore trovato:

$$(58)\quad \frac{\partial w}{\partial x} + (x + 2a)\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 2\frac{\partial w_1}{\partial x} - \frac{a\alpha_1}{1 - a^2}.$$

Ora poniamo:

$$x + 2a = x_1, \quad y = y_1,$$

il che equivale ad assumere il punto O_1 come origine delle nuove coordinate x_1, y_1. Avendosi:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y_1},$$

l'equazione (58) potrà scriversi:

$$\frac{\partial w}{\partial x} + x_1\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) + y_1\frac{\partial}{\partial y_1}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial w_1}{\partial x_1} - \frac{a\alpha_1}{1 - a^2},$$

od anche, posto $r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$:

$$\frac{\partial w}{\partial x} + r_1\frac{\partial}{\partial r_1}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial w_1}{\partial x_1} - \frac{a\alpha_1}{1 - a^2},$$

ovvero:

$$\frac{\partial}{\partial r_1}\left(r_1\frac{\partial w}{\partial x}\right) = 2\frac{\partial w_1}{\partial x_1} - \frac{a\alpha_1}{1 - a^2},$$

(n)-armonica U', conoscendosi al contorno il valore della funzione, e delle sue derivate normali dei primi $n - 1$ ordini.

Rappresentiamo la funzione U' con n funzioni armoniche u'_0, $u'_1, \ldots, u'_{n-1}$, ponendo:

$$U' = u'_0 + x' u'_1 + x'^2 u + \ldots + x'^{n-1} u_{n-1}.$$

Se la rappresentazione conforme dell'area σ' sul cerchio σ del piano (xy) è data dalle formule:

$$x' = p_1(x, y),$$

$$y' = p_2(x, y),$$

sarà nel cerchio σ, chiamando $U, u_0, u_1, \ldots, u_{n-1}$, le funzioni U', $u'_0, u'_1, \ldots, u'_{n-1}$, espresse mediante le variabili x, y:

$$U = u_0 + p_1 x_1 + p_1^2 x_2 + \ldots + p_1^{n-1} u_{n-1},$$

od anche:

$$U = \sum_{i=0}^{i=n-1} p_1^i u_i. \tag{59}$$

Supponiamo che la funzione $p_1(x, y)$, sia un polinomio di grado m. Allora nella formula (59) i coefficienti $p_1, p_1^2, \ldots, p_1^{n-1}$, saranno polinomii di grado m, $2m, \ldots, (n-1)m$. Posto:

$$(n-1)m + 1 = N, \qquad (N > n$$

la funzione U sarà dunque (N)-armonica: e potremo rappresentar con N funzioni armoniche $w_0, w_1, \ldots, w_{N-1}$, mediante la formul

$$U = w_0 + (r^2 - 1) w_1 + (r^2 - 1)^2 w_2 + \ldots + (r^2 - 1)^{N-1} w_{N-} \tag{60}$$

che scriveremo:

$$U = w_0 + (r^2 - 1) w_1 + (r^2 - 1)^2 w_2 + \ldots$$
$$+ (r^2 - 1)^{n-1} w_{n-1} - (r^2 - 1)^n W,$$

indicando con W la funzione $(N - n)$-armonica

$$w_n + (r^2 - 1) w_{n+1} + \ldots + (r^2 - 1)^{N-n-1} w_{N-1}.$$

Questa formula è analoga alla (13), trovata nel caso che la funzione U' fosse bi-armonica.

Tenendo conto dei valori assegnati al contorno per la funzione U', e per le sue derivate normali dei primi $n-1$ ordini, potremo determinare in tutto il cerchio σ le n funzioni armoniche w_0, w_1, w_2, ..., w_{n-1}, conosciute le quali anche la funzione W dovrà risultare determinata.

Si tratta dunque di trasformare la formula (59) in modo da ridurla alla (60).

Perciò osserviamo che un polinomio rappresenta sempre una funzione poli-armonica, e precisamente, se g è il suo grado, rappresenta una funzione $\left(\frac{g+2}{2}\right)$-armonica, o $\left(\frac{g+1}{2}\right)$-armonica, secondochè g è pari o dispari. Potremo quindi rappresentarlo con $\frac{g+2}{2}$ o con $\frac{g+1}{2}$ funzioni armoniche, le quali saranno esse stesse dei polinomii.

Poniamo sotto questa forma i polinomii p_1^2, p_1^3, ..., p_1^{n-1}, che compariscono nella formula (59) e sia in generale:

$$p_1^i = \sum_h (x^2+y^2)^h p_{h,i},$$

ove le quantità $p_{h,i}$ rappresentano dei polinomii armonici, che saranno in numero di $\frac{mi+2}{2}$, o $\frac{mi+1}{2}$, secondochè il grado mi del polinomio p_1^i è pari o dispari.

Questa trasformazione dei polinomii p_1^i si può fare nel modo seguente. Se p e q sono polinomii armonici, e poniamo

$$p = 2\frac{\partial p'}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial q'}{\partial x},$$

p' e q' essendo altri polinomii armonici, sarà:

$$pq = \left[\frac{\partial p'}{\partial x}\frac{\partial q'}{\partial x} + \frac{\partial p'}{\partial y}\frac{\partial q'}{\partial y}\right] + \left[\frac{\partial p'}{\partial x}\frac{\partial q'}{\partial x} - \frac{\partial p'}{\partial y}\frac{\partial q'}{\partial y}\right].$$

Il polinomio chiuso entro la prima parentesi ha la stessa forma della funzione V, considerata nel § 6 e seg.: e potremo trasformarla nello stesso modo, fino ad ottenere una formula analoga alla (17), in cui le funzioni armoniche $v_0, v_1, \ldots$ saranno dei polinomii. Il polinomio chiuso entro la seconda parentesi è già armonico. Così dunque avremo rappresentato con una formula analoga alla (17) il polinomio pq, prodotto di due polinomii armonici qualunque.

Facendo questa trasformazione sul polinomio $p_1 p_1$, otterremo la formula:

$$p_1^2 = \sum_h (x^2 + y^2)^h p_{h,2},$$

i polinomii $p_{h,2}$ essendo armonici.

Da essa ricaviamo:

$$p_1^3 = \sum_h (x^2 + y^2)^h p_{h,2} p_1. \tag{61}$$

I polinomii $p_{h,2} p_1$, ciascuno dei quali è il prodotto di due polinomii armonici, potremo trasformarli in modo analogo. Ed allora l'equazione (61) assumerà la forma:

$$p_1^3 = \sum_h (x^2 + y^2)^h p_{h,3},$$

ove i polinomii $p_{h,3}$ sono pure armonici. Seguitando così potremo trasformare tutti i polinomii p_1^i, fino all'ultimo di essi, che è p_1^{n-1}.

Ciò fatto, l'equazione (59) diventerà:

$$U = \sum_i \sum_h (x^2 + y^2)^h p_{h,i} u_i,$$

ovvero:

$$U = \sum_h (x^2 + y^2)^h \sum_i p_{h,i} u_i.$$

Posto per brevità:

$$V_h = \sum_i p_{h,i} u_i,$$

avremo:

(62) $$U = \sum_h (x^2 + y^2)^h V_h.$$

Consideriamo ora altri polinomii armonici $q_{h,i}$, $p_{h,i}$, ed altre funzioni armoniche v_i, tali che sia:

$$2\frac{\partial q_{h,i}}{\partial x} = p_{h,i}, \quad \frac{\partial v_i}{\partial x} = u_i.$$

Sarà:

$$V_h = \sum_i 2\frac{\partial q_{h,i}}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial x}$$

od anche:

$$V_h = \sum_i \left\{\left[\frac{\partial q_{h,i}}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial q_{h,i}}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial y}\right] + \left[\frac{\partial q_{h,i}}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial q_{h,i}}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial y}\right]\right\},$$

o più semplicemente:

(63) $$V_h = \sum_i [V_{h,i} + V'_{h,i}],$$

essendo:

(64) $$V_{h,i} = \frac{\partial q_{h,i}}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial x} + \frac{\partial q_{h,i}}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial y}, \quad V'_{h,i} = \frac{\partial q_{h,i}}{\partial x}\frac{\partial v_i}{\partial x} - \frac{\partial q_{h,i}}{\partial y}\frac{\partial v_i}{\partial y}.$$

Le funzioni $V_{h,i}$ hanno la stessa forma della funzione V (§ 6). Potremo dunque trasformarle in modo analogo, passando successivamente da ciascuna delle funzioni v_i, ad altre funzioni v'_i, v''_i, etc., finchè arriveremo a certe funzioni che chiamerò v^*_i, le quali saranno tante, quante le v_i, ossia n. Se questa operazione sarà stata ripetuta un numero di volte abbastanza grande, avremo ottenute tutte le funzioni $V_{h,i}$ rappresentate da formule del tipo:

(65) $$V_{h,i} = \sum_j (x^2 + y^2)^j v^{(j)}_{h,i}$$

essendo le $v^{(j)}_{h,i}$ altre funzioni armoniche. Queste funzioni $v^{(j)}_{h,i}$ risulte-

ranno tutte quante espresse, mediante le fuuzioni $v_i^{\bullet}$, da formule analoghe alla (30). Sarà cioè:

$$(66) \qquad v_{h,i}^{(j)\prime} = \frac{\partial \lambda_{h,i}^{(j)}}{\partial y} \frac{\partial v_i^{\bullet}}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_{h,i}^{(j)}}{\partial x} \frac{\partial v_i^{\bullet}}{\partial y} + \mu_{h,i}^{(j)},$$

in cui i $\lambda_{h,i}^{(j)}$ saranno polinomii armonici noti; i $\mu_{h,i}^{(j)}$ saranno anch'essi polinomii armonici, che però conterranno un certo numero di costanti arbitrarie, le quali nascono quando dalle funzioni v_i, si passa successivamente alle funzioni v_i', v_i'', ..., $v_i^{\bullet}$.

Le funzioni $V'_{h,i}$ sono armoniche, ed hanno la stessa forma delle funzioni $v_{h,i}^{(j)}$ (come si vede ponendo, nella seconda delle formule (64), $\frac{\partial q_{h,i}}{\partial x} = \frac{\partial \lambda_{h,i}}{\partial y}$, $\frac{\partial q_{h,i}}{\partial y} = -\frac{\partial \lambda_{h,i}}{\partial x}$, ed aggiungendo delle quantità $\mu'_{h,i}$ identicamente nulle; salvo a contenere le funzioni v_i, in luogo delle funzioni $v_i^{\bullet}$. Ma questa forma esse conservano quando dalle funzioni v_i si passa successivamente alle funzioni v_i', v_i'', ..., $v_i^{\bullet}$ (proprietà dimostrata al § 7 per la funzione v_1). Ne segue che le funzioni $V_{h,i} + V'_{h,i}$ saranno rappresentate, come le $V_{h,i}$, da formule del tipo (65); sarà cioè:

$$V_{h,i} + V'_{h,i} = \sum_j (x^2 + y^2)^j v_{h,i}^{(j)},$$

e per tutte le funzioni $v_{h,i}^{(j)}$ varrà la formula (66). L'equazione (63) potrà dunque scriversi:

$$V_h = \sum_i \sum_j (x^2 + y^2)^j v_{h,i}^{(j)},$$

od anche:

$$V_h = \sum_j (x^2 + y^2)^j \sum_i v_{h,i}^{(j)}.$$

Quindi la (62) diventerà:

$$U = \sum_h (x^2 + y^2)^h \sum_j (x^2 + y^2)^j \sum_i v_{h,i}^{(j)},$$

o più semplicemente, raccogliendo i fattori $(x^2 + y^2)^h$, $(x^2 + y^2)^j$:

$$(67) \qquad U = \sum_l (x^2 + y^2)^l \sum_i v_{i,l},$$

ove con $v_{i,l}$ indichiamo le stesse funzioni armoniche $v_{h,l}^{(j)}$. La formula (66), che dà l'espressione generale delle funzioni $v_{h,i}^{(j)}$, la scriveremo:

$$(68) \qquad v_{i,l} = \frac{\partial \lambda_{i,l}}{\partial y}\frac{\partial v_i^*}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_{i,l}}{\partial x}\frac{\partial v_i^*}{\partial y} + \mu_{i,l}.$$

Dall'equazione (67) si passa immediatamente all'altra:

$$U = \sum_l (r^2 - 1)^l \sum_i v_{i,l}, \qquad (r^2 = x^2 + y^2)$$

in cui però le sommatorie $\sum_i v_{i,l}$ non sono più quelle della formula (67). Posto:

$$\sum_i v_{i,l} = w_l,$$

sarà:

$$(69) \qquad U = \sum_l (r^2 - 1)^l w_l;$$

e per la formula (68):

$$(70) \qquad w_l = \sum_i \left[\frac{\partial \lambda_{i,l}}{\partial y}\frac{\partial v_i^*}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_{i,l}}{\partial x}\frac{\partial v_i^*}{\partial y} + \mu_{i,l}\right].$$

La formula (69) non è altro che la (60): l'indice l dovrà variare fra 0 ed $N - 1$.

Come abbiamo già osservato, le funzioni $w_0, w_1, \ldots, w_{n-1}$, si determinano tenendo conto dei valori che assumono, sulla circonferenza del cerchio σ, la funzione U, e le sue derivate normali dei primi $n - 1$ ordini. Si avranno allora le n equazioni

$$(71) \qquad \sum_i \left[\frac{\partial \lambda_{i,l}}{\partial y}\frac{\partial v_i^*}{\partial x} + \frac{\partial \lambda_{i,l}}{\partial x}\frac{\partial v_i^*}{\partial y}\right] = w_l - \sum_i \mu_{i,l},$$

corrispondenti ai valori 0, 1, 2, ..., $n - 1$, dell'indice l, per determinare le n funzioni $v_0^*, v_1^*, \ldots, v_{n-1}^*$, e le costanti incognite che compariscono nei polinomii $\mu_{i,l}$.

Perciò basterà costruire le altre n equazioni:

$$(72)\quad \sum_i \left[\frac{\partial \lambda_{i,l}}{\partial y}\frac{\partial v_i^*}{\partial y} - \frac{\partial \lambda_{i,l}}{\partial x}\frac{\partial v_i^*}{\partial x}\right] = w_l' - \sum_i \mu_{i,l}', \quad (l = 0, 1, 2, \ldots n-1)$$

in cui le funzioni w_l' sono legate alle w_l dalle formule:

$$\frac{\partial w_l'}{\partial x} = \frac{\partial w_l}{\partial y}, \quad \frac{\partial w_l'}{\partial y} = -\frac{\partial w_l}{\partial x},$$

e relazioni analoghe legano i polinomii $\mu_{i,l}'$ ai polinomii $\mu_{i,l}$. In ciascuna delle equazioni (72) comparirà una nuova costante arbitraria (confr. eq. (35) e (36), §§ 8-9).

Ciò fatto, le derivate rispetto ad x ed y delle funzioni v_i^* si otterranno risolvendo le $2n$ equazioni lineari (71) e (72), e attribuendo alle costanti che compariscono nei polinomii $\mu_{i,l}$, $\mu_{i,l}'$, valori tali che queste derivate non diventino infinite in nessun punto del cerchio σ. Così conosceremo, per la formula (70), le rimanenti funzioni armoniche $w_n, w_{n+1}, \ldots, w_{N-1}$, che dovranno risultare completamente determinate: e quindi ancora la funzione U, e finalmente la U'.

Torino, marzo 1899.

E. ALMANSI.

SUL CONCETTO DI DERIVATA NELLA TEORIA ELEMENTARE DELLE FUNZIONI ANALITICHE.

Nota di G. Vivanti, in Messina.

Adunanza del 26 febbrajo 1899.

1. La teoria delle funzioni analitiche, i cui principii sono dovuti a Weierstrass, ha la proprietà caratteristica di svolgersi indipendentemente dal concetto di *integrale curvilineo;* ed è a ciò principalmente che allude l'epiteto di *elementare* ad essa attribuito da alcuni analisti (*). Però ancora più spiccato appare tale suo carattere, quando si consideri che essa può rendersi anche indipendente dal concetto di *derivata,* quale figura nel Calcolo. Per tal modo la teoria delle funzioni analitiche, fondata sulla sola Algebra, si presenta come una continuazione immediata della teoria delle serie.

Per raggiungere tale scopo, occorre dare una definizione *elementare,* cioè puramente algebrica, della derivata d'una funzione analitica, e mostrare che, per la derivata così definita, sussistono tutti i teoremi fondamentali del Calcolo differenziale.

(*) « Die *elementare,* d. h. lediglich auf die Lehre von den Potenzreihen, nicht « aber auf die Anwendung der *Infinitesimalrechnung,* insbesondere der *complexen* « *Integration* gegründete *Theorie der analytischen Functionen...* », Pringsheim, *Ueber Vereinfachungen in der elementaren Theorie der analytischen Functionen,* Math. Ann., t. XLVII, pag. 121.

2. Diremo *derivata* (*) d'una serie di potenze:

$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i$$

la serie:

$$\sum_{i=1}^{\infty} i a_i z^{i-1} = \sum_{i=0}^{\infty} (i+1) a_{i+1} z^i,$$

ottenuta da essa moltiplicando ciascun termine per l'esponente di z che figura nel medesimo, e diminuendo l'esponente stesso d'una unità.

Si dimostra facilmente che *il raggio vero di convergenza della serie derivata è eguale a quello della serie primitiva.*

Risulta poi dalla definizione data, che, *se una serie di potenze si riduce al solo termine costante, la sua derivata è una serie identicamente nulla;* e, reciprocamente, che *una serie identicamente nulla può considerarsi come la derivata d'una serie ridotta al solo termine costante,* il quale d'altronde può essere qualunque.

La serie derivata della derivata dicesi *derivata seconda* della serie primitiva, e così via.

Una serie data:

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i$$

può considerarsi come la derivata della serie:

$$c + \sum_{i=0}^{\infty} \frac{b_i z^{i+1}}{i+1},$$

dove c può essere una costante qualunque. Cioè: *Ogni serie di potenze è la derivata d'una serie di potenze completamente determinata a meno del suo termine costante,* la quale può dirsi il suo *integrale indefinito.*

3. Indicando con $P'(z)$, $P''(z)$, ... le derivate successive della serie $P(z)$, con $P(z;\, c)$ la serie *dedotta* dalla $P(z)$ per un punto c,

(*) Pincherle, *Lezioni sulla teoria delle funzioni,* Bologna, 1893, Lez. VI.

erno al suo cerchio di convergenza, si ha, come è noto:

$$R(z - c) = P(z; c) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(z-c)^i}{i!} P^{(i)}(c)$$

ove $P^{(0)}(c) \equiv P(c)$], e quindi:

$$R'(z - c) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{(z-c)^{i-1}}{(i-1)!} P^{(i)}(c) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(z-c)^i}{i!} P^{(i+1)}(c)$$

D'altra parte, posto:

$$P'(z) = Q(z),$$

ha:

$$P^{(i+1)}(z) = Q^{(i)}(z),$$

quindi:

$$Q(z; c) = \sum \frac{(z-c)^i}{i!} Q^{(i)}(c) = \sum \frac{(z-c)^i}{i!} P^{(i+1)}(c) = R'(z - c)$$

Ora [illegible]

[illegible]

e quindi:

$$R'(z) = P'(z) + Q'(z).$$

5. *La derivata del prodotto di due serie di potenze è la somma prodotti ottenuti moltiplicando ciascuna delle due serie per la derivata l'altra.*

Posto ancora:

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i z^i, \quad Q(z) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i z^i,$$

si ha:

$$R(z) = P(z)\,Q(z) = \sum_{i=0}^{\infty} \left[z^i \sum_{h=0}^{i} a_h b_{i-h} \right],$$

e derivando:

$$R'(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \left[i z^{i-1} \sum_{h=0}^{i} a_h b_{i-h} \right]$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} \left[z^{i-1} \sum_{h=0}^{i} (i-h) a_h b_{i-h} \right] + \sum_{i=1}^{\infty} \left[z^{i-1} \sum_{h=0}^{i} h\, a_h b_{i-h} \right],$$

ossia:

$$(1) \qquad R(z) = P(z)\,Q'(z) + P'(z)\,Q(z).$$

6. Mediante l'induzione completa può stabilirsi il teorema analogo pel prodotto d'un numero qualunque di fattori.

Nel caso particolare in cui questi sono tutti eguali, si ha:

$$(2) \qquad [P^n(z)]' = n\,P^{n-1}(z)\,P'(z).$$

Di qui si ottiene una formola ricorrente, che ci sarà utile in seguito.

Pongasi:

$$P(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{1i} z^i, \quad P^n(z) = \sum_{i=0}^{\infty} a_{ni} z^i;$$

segue dalla (2):

$$\sum_{i=1}^{\infty} i\, a_{ni} z^{i-1} = n \sum_{i=0}^{\infty} a_{n-1,i} z^{i} \cdot \sum_{i=1}^{\infty} i\, a_{1i} z^{i-1} = n \sum_{i=1}^{\infty} \left[z^{i-1} \sum_{k=1}^{i} k\, a_{n-1,i-k}\, a_{1k} \right],$$

da cui, pel teorema sull'identità di due serie di potenze:

$$(3) \qquad a_{ni} = \frac{n}{i} \sum_{k=1}^{i} k\, a_{n-1,i-k}\, a_{1k}.$$

7. Se $P(z)$ è una serie di potenze la quale non s'annulla nell'origine, esiste (*) una serie $R(z)$, il cui cerchio di convergenza è limitato dalla circonferenza γ passante pel posto-zero di modulo minimo di $P(z)$, e che in ogni punto interno di questo cerchio soddisfa alla relazione:

$$P(z)\, R(z) = 1.$$

La serie $R(z)$ si dice *reciproca* di $P(z)$; e si scrive:

$$R(z) = \frac{1}{P(z)}.$$

Più generalmente, essendo $Q(z)$ un'altra serie di potenze convergente entro una certa circonferenza δ, esiste una serie $S(z)$, il cui cerchio di convergenza è limitato dalla più piccola delle due circonferenze γ, δ, e che in ogni punto interno a tale cerchio soddisfa alla relazione:

$$P(z)\, S(z) = Q(z).$$

Si ha di qui, moltiplicando da ambe le parti per $R(z)$, ossia per $\frac{1}{P(z)}$:

$$S(z) = Q(z) \cdot \frac{1}{P(z)}.$$

(*) Cfr. p. es. Pincherle, l. c., Lez. VII.

Si dice che $S(z)$ è il *quoziente* delle serie $Q(z)$, $P(z)$; e si scrive:

$$S(z) = \frac{Q(z)}{P(z)}.$$

Poichè il prodotto $P(z)R(z)$ è una serie di potenze che si riduce al solo termine costante 1, si ha:

$$[P(z)R(z)]' = 0,$$

ed applicando la (1):

$$P(z)R'(z) + P'(z)R(z) = 0,$$

ossia, per ciò che testè si è stabilito:

$$R'(z) = -\frac{P'(z)R(z)}{P(z)} = -\frac{P'(z)}{P^2(z)}.$$

Si ha ancora dalla (1):

$$S'(z) = Q(z)R'(z) + Q'(z)R(z) = -Q(z)\frac{P'(z)}{P^2(z)} + \frac{Q'(z)}{P(z)},$$

ossia:

$$S'(z) = \frac{P(z)Q'(z) - Q(z)P'(z)}{P^2(z)},$$

che è la nota espressione per la derivata d'un quoziente.

8. Sia:

$$Q(u) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i u^i$$

una serie di potenze col raggio di convergenza σ, e sia $P(z)$ una serie di potenze, il cui modulo sia $< \sigma$ per ogni valore di z di modulo non maggiore d'una certa quantità ρ. Pel *lemma di Weierstrass*, la serie doppia:

$$Q[P(z)] = \sum_{i=0}^{\infty} b_i P^i(z)$$

Dunque:

$$(4)\qquad R'(z) = P'(z)\, Q'(u),$$

che è la nota formola per la derivazione delle funzioni di funzione.

9. La serie esponenziale:

$$e^z = 1 + \frac{z}{1!} + \frac{z^2}{2!} + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!},$$

convergente in tutto il piano, è identica alla propria derivata; infatti:

$$D e^z = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{z^{i-1}}{(i-1)!} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{z^i}{i!} = e^z.$$

Quindi, se nella (4) si fa:

$$Q(u) = e^u,$$

si ha:

$$(5)\qquad D e^{P(z)} = e^{P(z)} P'(z).$$

Dopo ciò, abbiasi una serie di potenze $S(z)$ convergente in tutto il piano e non avente alcuna radice; $\frac{1}{S(z)}$ sarà una serie di potenze convergente del pari in tutto il piano, e così $\frac{S'(z)}{S(z)}$. Indichiamo con $T(z)$ l'integrale di quest'ultima serie, cioè poniamo:

$$T'(z)\, S(z) = S'(z),$$

inoltre:

$$e^{T(z)} = U(z);$$

sarà per la (5):

$$U'(z) = U(z)\, T'(z),$$

quindi:

$$U'(z)S(z) - U(z)S'(z) = 0,$$

da cui:

$$\frac{U'(z)S(z) - U(z)S'(z)}{S^2(z)} = 0.$$

Ora il primo membro è la derivata di $\frac{U(z)}{S(z)}$, quindi questo rapporto dev'essere costante, cioè:

$$S(z) = C\,U(z) = C e^{T(z)},$$

che può anche scriversi, modificando opportunamente il termine costante di $T(z)$:

$$S(z) = e^{T(z)}.$$

Donde il teorema noto: *Una funzione intera, non avente radici, può sempre porsi sotto la forma $e^{T(z)}$, dove $T(z)$ è una funzione intera.*

10. Sia $f(z)$ la funzione analitica generata dall'elemento $P(z)$, $g(z)$ quella generata dall'elemento $P'(z) = Q(z)$. Da ciò che si è detto sopra risulta:

Che $f(z)$ e $g(z)$ hanno lo stesso campo d'esistenza;

Che, se c è un punto qualunque di questo, l'elemento corrispondente di $g(z)$ è la derivata di quello di $f(z)$.

Pertanto alla funzione $g(z)$ può darsi il nome di *derivata* della funzione $f(z)$.

11. Abbiansi n serie di potenze $P_1(z)$, $P_2(z)$, ..., $P_n(z)$, le quali generino rispettivamente le funzioni analitiche $f_1(z)$, $f_2(z)$, ..., $f_n(z)$. Se tra le $P_i(z)$ esiste una relazione:

$$F[P_1(z), P_2(z), \ldots, P_n(z)] = 0, \tag{6}$$

dove F è simbolo di funzione razionale intera (cioè se, trasformando

il primo membro della (6) in una serie di potenze, questa risul
ticamente nulla), la stessa relazione esiste tra gli elementi dell
corrispondenti ad un punto qualunque del campo comune d'e
di queste funzioni (*). Potrà scriversi in tal caso:

$$F[f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)] = 0.$$

Se si ha, in particolare:

$$P_1(z) + P_2(z) - P_3(z) = 0,$$

$$P_1(z) P_2(z) - P_3(z) = 0,$$

$$P_1(z) - P_2(z) P_3(z) = 0,$$

potrà scriversi corrispondentemente:

$$f_3(z) = f_1(z) + f_2(z),$$

$$f_3(z) = f_1(z) f_2(z),$$

$$f_3(z) = \frac{f_1(z)}{f_2(z)}.$$

Di qui i teoremi:

Se due funzioni analitiche hanno un campo comune d esiste una funzione analitica il cui valore in ciascun punto somma dei valori delle due funzioni nello stesso punto. Ess delle due funzioni.

Analogamente pel *prodotto.*

Analogamente pel *quoziente, purchè la funzione di nulli mai nel campo C.*

12. Dopo ciò si possono estendere immediatam analitiche i teoremi dianzi stabiliti per le serie di pc

---

(*) ...cherle, l. c., Lez. IX.

Consideriamo p. es. il prodotto:

$$f_3(z) = f_1(z) f_2(z).$$

Si ha:

$$P_3'(z) = P_1(z) P_2'(z) + P_2(z) P_1'(z),$$

quindi la stessa relazione sussisterà tra le funzioni analitiche generate da questi elementi. Ma le $P_i'(z)$ generano le $f_i'(z)$; quindi:

$$f_3'(z) = f_1(z) f_2'(z) + f_2(z) f_1'(z).$$

Nello stesso modo si procede negli altri casi.

Messina, 21 febbrajo 1899.

G. Vivanti.

INVOLUZIONE DI GRADO n E SPECIE 1 IN UNO SPAZIO A $n-1$ DIMENSIONI.

Nota di **M. Morale**, in Bagni Canicattini.

Adunanza del 26 marzo 1899.

1. La curva C_1^n (normale) d'ordine n dello spazio S_n a n dimensioni, è determinata da $(n-1)(n+3)$ condizioni e perciò una tale curva è individuata se deve passare per $n+3$ punti dati. Allora le curve C_1^n passanti per $n+2$ punti dati $P_0^{(1)}, P_0^{(2)}, \ldots, P_0^{(n+2)}$, sono (∞^{n-1}), e per un punto di S_n ne passa una sola.

Esse incontrano uno spazio Σ_{n-1} a $n-1$ dimensioni, ciascuna in n punti. Si hanno così (∞^{n-1}) gruppi di n punti in Σ_{n-1} e ciascun gruppo è determinato da uno qualunque dei suoi punti. Tali gruppi formano dunque un'involuzione di grado n e specie 1, I_1^n.

2. Due degli $n+2$ punti P_0 determinano una retta, mentre gli altri n determinano uno spazio S_{n-1} a $n-1$ dimensioni, che incontra la retta in un punto S_0. Gli n punti P_0 ed il punto S_0 determinano (∞^{n-2}) curve C_1^{n-1}, d'ordine $n-1$, normali di S_{n-1}, passanti per essi. Per un punto di S_{n-1} passa una sola C_1^{n-1}, onde:

Vi sono (∞^{n-2}) C_1^n spezzate in una retta $P_1^{(rs)}$ passante per 2, $P_0^{(r)}$, $P_0^{(s)}$ degli $n+2$ punti P_0 e in una C_1^{n-1} che si appoggia a tale retta e passa per gli altri punti P_0.

Adunque vi sono in Σ_{n-1} $\binom{n+2}{2}$ punti fondamentali, intersezione di esso colle rette P_1, a ciascuno dei quali corrispondono (∞^{n-2}) gruppi di $n-1$ punti, intersezioni delle (∞^{n-2}) C_1^{n-1} collo stesso Σ_{n-1}, giacenti tutti in uno spazio Σ_{n-2} a $n-2$ dimensioni, comune a Σ_{n-1} e ad S_{n-1}. In altri termini gli $\binom{n+2}{2}$ punti fondamentali hanno per coniugati, ciascuno (∞^{n-2}) gruppi di $n-1$ punti, formanti una I_1^{n-1} in un determinato Σ_{n-2}.

Questi $\binom{n+2}{2}$ punti li diremo *fondamentali d'ordine* $n-1$ e li indicheremo con $Q_0^{(n-1)}$.

Analogamente in ogni Σ_{n-2} vi sono $\binom{n+1}{2}$ punti fondamentali $Q_0^{(n-2)}$ d'ordine $n-2$, a ciascuno dei quali corrisponde una I_1^{n-1}, contenuta in un determinato Σ_{n-3}, e però in Σ_{n-1} vi sono in tutto

$$\binom{n+2}{2}\binom{n+1}{2}$$

punti fondamentali d'ordine $n-2$.

Così seguitando si vede che la I_1^n di Σ_{n-1} è dotata di

$$\binom{n+2}{2}\binom{n+1}{2}\cdots\binom{n-k+3}{2}$$

punti fondamentali $Q_0^{(n-k)}$ d'ordine $n-k$, a ciascuno dei quali corrisponde una I_1^{n-k} contenuta in un determinato spazio Σ_{n-k-1} a $n-k-1$ dimensioni.

Notisi che il massimo valore di k è $n-2$.

3. Sia:

(1) $\qquad X_1 : X_2 : \ldots : X_{n+1} = f_1(\lambda) : f_2(\lambda) : \ldots : f_{n+1}(\lambda)$

l'equazione di una C_1^n, dove le $f(\lambda)$ sono funzioni razionali, intere e di grado n nel parametro λ.

Sia poi:

$$(2)\qquad a_1 X_1 + a_2 X_2 + \dots + a_{n+1} X_{n+1} = 0$$

l'equazione dell'iperpiano Σ_{n-1}. I punti in cui questo sega la curva sudetta, sono dati dagli n valori di λ che risolvono l'equazione:

$$a_1 f_1(\lambda) + a_2 f_2(\lambda) + \dots + a_{n-1} f_{n-1}(\lambda) = 0,$$

che si può scrivere:

$$(3)\qquad \lambda^n + A_1 \lambda^{n-1} + A_2 \lambda^{n-2} + \dots + A_{n-1}\lambda + A_n = 0.$$

Le funzioni $f(\lambda)$ contengono, come è noto, $(n-1)(n+3)$ coefficienti arbitrari, ma siccome la C_1^n deve passare per gli $n+2$ punti P_0, così in esse restano determinati $(n-1)(n+2)$ coefficienti e ne rimangono solamente ad arbitrio:

$$(n-1)(n+3)-(n-1)(n+2) = n-1.$$

Al variare di questi $n-1$ coefficienti si ottengono tutte le $(\infty^{n-1})\, C_1^n$.

Allora anche la (3) contiene $n-1$ coefficienti arbitrari, al variare dei quali si ottengono gli (∞^{n-1}) gruppi della I_1^n.

4. Se la (3) avesse una radice k-pla, questa dovrebbe annullare la (3) e le sue prime $k-1$ derivate. Si avrebbero così k equazioni di condizione che servirebbero a determinare $k-1$ degli $n-1$ coefficienti arbitrari, e però nella (3) resterebbero arbitrari solamente:

$$n-1-(k-1) = n-k$$

coefficienti, al variare dei quali si otterrebbero (∞^{n-k}) radici k-ple. A ognuna di queste corrisponde nella I_1^n un punto k-plo, e però:

Il luogo dei punti k-pli della I_1^n è una varietà a $n-k$ dimensioni.

Di che ordine è questa varietà?

Si è visto che nella I_1^n vi sono dei punti $Q_0^{(k)}$ fondamentali d'ordine

k, a ciascuno dei quali corrisponde una I_1^k contenuta in un determinato Σ_{k-1} (§ 2). Questo segherà la detta varietà in μ punti, se μ è l'ordine di essa, ed è facile vedere che questi μ punti sono tutti e soli i punti k-pli della I_1^k. Adunque l'ordine μ della varietà considerata è data dal numero dei punti k-pli della I_1^k.

Supponendo $k = n$, si tratta di trovare il numero dei punti n-pli della I_1^n.

La (3) dà i gruppi degli n punti in cui Σ_{n-1} sega ogni C_1^n. Se questi n punti devono coincidere, la (3) deve avere una radice r n-pla, e deve quindi potersi mettere sotto la forma:

$$(\lambda - r)^n = 0$$

cioè:

$$(3') \qquad \lambda^n - \binom{n}{1}\lambda^{n-1}r + \binom{n}{2}\lambda^{n-2}r^2 - \ldots = 0.$$

Le (3) e (3') essendo identiche, dànno luogo ad n equazioni di condizione che si ottengono uguagliando i coefficienti delle potenze simili. Queste equazioni contengono n incognite, che sono gli $n - 1$ coefficienti arbitrari ed r. Questa comparisce nelle n equazioni, successivamente cogli esponenti da 1 ad n e quindi vi sono $n!$ sistemi di soluzioni per le dette variabili. Agli $n!$ valori di r corrispondono altrettanti punti n-pli della I_1^n. Adunque una I_1^n è dotata di $n!$ punti n-pli e, per $n = k$, si ha che una I_1^k ha $k!$ punti k-pli, onde:

Il luogo dei punti k-pli della I_1^n è una varietà a $n - k$ dimensioni e dell'ordine $k!$

5. Se un punto descrive una varietà, gli $n - 1$ suoi punti coniugati descrivono un'altra varietà delle stesse dimensioni, che diremo *coniugata* della prima.

Si vuol vedere ora qual'è l'ordine della varietà coniugata di una data varietà d'ordine assegnato.

Si consideri prima il caso in cui il punto descriva una retta R_1. Gli $n - 1$ punti coniugati descrivono allora una certa curva C^μ d'ordine μ.

Premettiamo che uno spazio Σ_{n-2} in cui giace una I_1^{n-1}, coi

dente di un dato punto $Q_0^{(n-1)}$ fondamentale d'ordine $n - 1$, passa per $\binom{n}{2}$ punti $Q_0^{(n-1)}$, fra i quali non è però compreso il primo. La retta R_1 intanto incontra gli spazi Σ_{n-2} in un punto ciascuno, e però la C_1^n passa per tutti i punti $Q_0^{(n-1)}$ e con un solo ramo.

La R_1 inoltre incontra il dato Σ_{n-2} in un punto al quale ne corrispondono $n - 1$, dei quali uno è il dato $Q_0^{(n-1)}$ e gli altri $n - 2$ giacciono in Σ_{n-2}; adunque Σ_{n-2} incontra la C_1^μ negli $\binom{n}{2}$ punti fondamentali sudetti e in $n - 2$ punti variabili; sarà perciò:

$$\mu = \binom{n}{2} + n - 2 = \binom{n+1}{2} - 2. \tag{4}$$

a) Se invece della retta R_1 si considera una curva d'ordine ν, allora, con analogo ragionamento, si ricava che la curva coniugata C_1^μ passa per i punti $Q_0^{(n-1)}$ con ν rami ed incontra il dato Σ_{n-2} in altri $\nu(n - 2)$ punti variabili, onde sarà in questo caso:

$$\mu = \nu\binom{n}{2} + \nu(n-2) = \nu\left[\binom{n}{2} + n - 2\right] = \nu\left[\binom{n+1}{2} - 2\right]. \tag{5}$$

b) Suppongasi ora che il punto descriva una varietà V_k^ν a k dimensioni e d'ordine ν. Si vuol trovare l'ordine μ della varietà V_k^μ coniugata.

Si consideri uno Σ_{n-k} degli spazî in cui sono contenute le I_1^{n-k+1}, corrispondenti dei punti Q_0^{n-k+1} fondamentali d'ordine $n - k + 1$. Allora Σ_{n-k} segherà la V_k^ν in una curva C_1^ν e la V_k^μ in un'altra curva C_1^μ, che sarà coniugata della C_1^ν nella I_1^{n-k+1}, ivi contenuta. Ma dalla (5), per $n = n - k + 1$, si ha:

$$\mu = \nu\left[\binom{n-k+1}{2} + (n-k-1)\right] = \nu\left[\binom{n-k+2}{2} - 2\right]; \tag{6}$$

adunque:

La varietà coniugata di una data varietà a k dimensioni e dell'or-

dine ν, *è anch'essa a* k *dimensioni e dell'ordine*

$$\nu\left[\binom{n-k+2}{2}-2\right].$$

Si consideri uno spazio Σ_{n-k-1} coniugato di un punto $Q_0^{(n-k)}$. Esso sega la V_k^ν in ν punti e però la V_k^μ avrà il punto $Q_0^{(n-0)}$ come multiplo d'ordine ν. Si ricava da ciò che la V_k^μ avrà gli

$$\binom{n+2}{2}\binom{n+1}{2}\cdots\binom{n-k+3}{2}$$

punti $Q_0^{(n-k)}$ come multipli d'ordine ν.

Osservazione. — Se la V_k^ν è dotata di una varietà r-pla, questa ha per coniugata una varietà che è manifestamente r-pla per la V_k^μ.

6. Si supponga ora che un punto descriva la varietà $V_{k!}^{n-k}$ a $n-k$ dimensioni e dell'ordine $k!$, luogo dei punti k-pli della I_1^n. Gli $n-1$ punti coniugati descriveranno una varietà ψ dell'ordine

$$k!\left[\binom{n+1}{2}+(k-1)\right]=k!\left[\binom{k+2}{2}-2\right].$$

Siccome però $k-1$ degli $n-1$ punti coniugati, coincidono col dato, così da questa si stacca $k-1$ volte la $V_{k!}^{(n-k)}$, e quindi l'ordine di ψ sarà:

$$k!\left[\binom{k+1}{2}+(k-1)\right]-(k-1)k!=k!\binom{k+1}{2};$$

adunque:

La varietà coniugata della varietà k-pla della I_1^n *è dell'ordine* $k!\binom{k+1}{2}$.

7. Da quanto si è detto al § 5, b, si vede che tutte le C_1^n che si appoggiano ai vari punti di una varietà a k dimensioni e dell'ordine

ν, segano ancora Σ_{n-1} in una varietà pure a k dimensioni e dell'ordine $\nu\left[\binom{n-k+1}{2}+(n-k-1)\right]$, e però esse giacciono sopra una varietà a $k+1$ dimensioni e dell'ordine

$$\nu\left[\binom{n-k+1}{2}+(n-k-1)\right]+\nu=\frac{\nu}{2}(n-k+3)(n-k);$$

dunque:

Le curve C_1^n che si appoggiano ai punti di una varietà a k dimensioni e d'ordine ν, giacciono sopra una varietà a $k+1$ dimensioni e dell'ordine $\frac{\nu}{2}(n-k+3)(n-k)$.

8. Se una C_1^n deve passare per un punto dato, essa va assoggettata a $n-1$ condizioni. Se il punto però non è dato di posizione, ma deve giacere in un dato S_r, la C_1^n viene assoggettata solamente ad $n-r-1$ condizioni, e però le C_1^n μ-*secanti* un dato S_r sono:

$$(n-1)-\mu(n-r-1)=\mu r-(n-1)(\mu-1)$$

volte ∞.

Supposto $\mu=r+1$, si ha che:

Le C_1^n che incontrano in $r+1$ punti un dato S_r, sono $\infty^{r(r+2-n)}$.

Da questa formola si vede che le C_1^n che incontrano in $n-1$ punti un dato S_{n-2}, sono in numero finito, e che per $r<n-2$ non vi sono in generale C_1^n che incontrino in $r+1$ punti un dato S_r.

Si può ora dimostrare che:

Vi è una sola C_1^n che incontra in $n-1$ punti un dato S_{n-2}.

Ed infatti questo S_{n-2} sia determinato dall'intersezione di Σ_{n-1} con un altro spazio a $n-1$ dimensioni di equazione:

$$a'_1X_1+a'_2X_2+\ldots+a'_{n+1}X_{n+1}=0.$$

I punti comuni a questo e ad una C_1^n sono dati dall'equazione (§ 3):

$$a'_1f_1(\lambda)+a'_2f_2(\lambda)+\ldots+a'_{n+1}f_{n+1}(\lambda)=0,$$

e però se S_{n-2} deve incontrare C_1^n in $n-1$ punti, occorre che la sudetta equazione e l'altra:

$$a_1 f_1(\lambda) + a_2 f_2(\lambda) + \ldots a_{n+1} f_{n+1}(\lambda) = 0$$

(§ 3) abbiano $n-1$ radici comuni.

Ora dette due equazioni contengono, oltre di λ, altre $n-1$ variabili le quali si potranno determinare in uno o più modi, in maniera che le dette due equazioni abbiano $n-1$ soluzioni comuni.

Adunque esisteranno uno o più gruppi di $n-1$ punti coniugati, contenuti nel dato S_{n-2}.

Si può però subito vedere, con un procedimento geometrico, che nel detto S_{n-2} non può esistere più di un solo gruppo.

Infatti sia $A_1, A_2, \ldots, A_{n-1}$ un gruppo di $n-1$ punti coniugati contenuto in S_{n-2}, intersezione di questo con una determinata C_1^n. Gli $n-2$ punti $A_1, A_2, \ldots, A_{n-2}$ determinano un S_{n-3}. Se da questo si proietta la detta C_1^n sopra un piano Π_2, si avrà per immagine una conica φ_1 passante pel punto O comune a Π_2 e ad S_{n-2}, giacchè O è l'immagine del punto A_{n-1}. Proiettando dal detto S_{n-3} le altre C_1^n, si avranno per immagini curve che incontrano la conica φ_1 negli $n+2$ punti fissi, immagine degli $n+2$ punti P_0, e in altri punti variabili. Se ammettiamo ora che nel detto S_{n-2} vi sia un altro gruppo di $n-1$ punti coniugati, dei quali k siano in S_{n-3} ($k = 0, 1, 2, \ldots$), allora la curva che passa per essi, avrà per immagine una curva d'ordine $n-k$, avente O per punto multiplo d'ordine $n-k-1$, giacchè O sarebbe l'immagine degli $n-k-1$ punti del gruppo non contenuti in S_{n-3}. Ma allora tale immagine d'ordine $n-k$ avrebbe comune colla φ_1 gli $n+2$ punti fissi e altri $n-k-1$ punti riuniti in O, cioè in tutto $n+2+n-k-1 = 2n-k+1$ punti, mentre non dovrebbe averne che $2(n-k)$, numero che è sempre minore del primo. Adunque nel dato S_{n-2} non può esistere più di un solo gruppo di $n-1$ punti coniugati nella I_1^n.

9. Si può allora stabilire una corrispondenza univoca tra i punti e gli S_{n-2} di Σ_{n-1}, per modo che ad un punto corrisponda l'S_{n-2} determinato dagli $n-1$ suoi punti coniugati, e ad un S_{n-2} corrisponda

il punto coniugato dell'unico gruppo di $n-1$ punti contenuto in esso.

Si può ora provare che se un punto P' giace in un dato S_{n-2}, il suo spazio S'_{n-2} corrispondente deve passare pel punto P, corrispondente di S_{n-2}.

Sieno infatti

$$\sum_{k=1}^{k=n+1} a'_k X_k = 0, \qquad \sum_{k=1}^{k=n+1} a''_k K_k = 0$$

le equazioni dello S_{n-1} e S'_{n-1} che incontrano Σ_{n-1} negli spazi S_{n-2} e S'_{n-2} rispettivamente.

Allora gli $n-1$ punti coniugati contenuti in S_{n-2} sono dati dalle $n-1$ soluzioni comuni alle due equazioni:

$$(1) \qquad \sum a_k f_k(\lambda) = 0$$

(§ 3), e

$$(2) \qquad \sum a'_k f_k(\lambda) = 0.$$

L'altro valore di λ che soddisfa la (1), determina il punto P. Analogamente gli $n-1$ punti coniugati contenuti in S'_{n-2} sono dati dalle $n-1$ soluzioni comuni alle equazioni (1) e

$$(3) \qquad \sum a''_k f_k(\lambda) = 0.$$

L'altro valore di λ che soddisfa la (1), dà la posizione del punto P'.

Segue che gli n valori di λ che determinano il gruppo della I^n_1, di cui $n-1$ punti giacciono in S_{n-2} e l'altro è P, sono funzioni lineari dei coefficienti a_k e a'_k tali che sostituendo in esse al posto dei coefficienti a'_k i coefficienti a''_k, si avranno gli n valori di λ che formano il gruppo della I^n_1, di cui $n-1$ punti giacciono in S'_{n-2} e l'altro punto è P', e viceversa. Segue da ciò che se il valore di λ che individua il punto P', soddisfa la (2), il valore di λ che individua il punto P, deve soddisfare la (3) per simmetria; e però se P' giace in S_{n-2}, S'_{n-2} passa per P. C. D. D.

Allora la corrispondenza così stabilita tra i punti e gli iperpiani di Σ_{n-1} è una *polarità ordinaria*.

Siccome un gruppo di n punti coniugati non giace mai in un iperpiano di Σ_{n-1}, così affinchè un punto possa giacere nel suo iperpiano polare, occorre che esso coincida con qualcuno dei suoi $n-1$ punti coniugati, e però la quadrica fondamentale della polarità sudetta, non è altro che la varietà doppia della I_1^n, la quale, come si è già visto (§ 4), è realmente ad $n-2$ dimensioni e del 2° ordine.

Osservisi ancora che siccome lo spazio polare di un punto è quello determinato dagli $n-1$ suoi punti coniugati, così gli n punti di un gruppo della I_1^n sono i vertici di un ennaedro autoconiugato nella polarità.

10. Se un punto descrive un S_{n-2} di Σ_{n-1}, il suo spazio polare passa costantemente per il polo S_0 di S_{n-2}, e però:

La varietà del 4° ordine (§ 5, b) coniugata di un iperpiano di Σ_{n-1}, è anche il luogo dei sottogruppi di $n-1$ punti della I_1^n, giacenti negli iperpiani della stella, che ha per centro il polo dell'iperpiano stesso.

11. Se da uno qualunque dei punti P_0, ad es. $P_0^{(1)}$, si proietta una C_1^n, si ha un cono d'ordine $n-1$, che è segato da Σ_{n-1} in una curva C_1 d'ordine $n-1$, passante per $n+1$ punti fondamentali $Q_0^{(1,2)}$, $Q_0^{(1,3)}$, ..., $Q_0^{(1,n+2)}$ (*).

Proiettando dallo spazio Π_{n-3}, a $n-3$ dimensioni, determinato da altri $n-2$ punti P_0, la stessa C_1^n, si ha un cono K_{n-1}^2, a $n-1$ dimensioni e del 2° ordine, che è segato da Σ_{n-1} in un cono K_{n-2}^2, pure del 2° ordine e ad $n-2$ dimensioni, avente per vertice lo spazio Π_{n-4} a $n-4$ dimensioni, intersezione di Π_{n-3} con Σ_{n-1}.

Questo Π_{n-4} passa per gli $\binom{n-2}{2}$ punti fondamentali, intersezione di Σ_{n-1} colle $\binom{n-2}{2}$ rette che uniscono gli $n-2$ punti P_0 considerati.

La C_1 e il cono K_{n-2}^2 hanno in comune $2(n-1)$ punti; però gli $n-2$ punti fondamentali, comune intersezione di Σ_{n-1} colle $n-2$ rette che da $P_0^{(1)}$ proiettano gli $n-2$ punti P_0 contenuti in Π_{n-3},

(*) $Q_0^{(r,s)}$ è il punto in cui la retta che unisce i punti $P_0^{(r)}$, $P_0^{(s)}$, incontra Σ_{n-1}.

sono fissi e quindi i punti variabili comuni sono solamente

$$2(n-1)-(n-2)=n.$$

È facile poi constatare che questi n punti sono quelli in cui la C_1^n considerata incontra Σ_{n-1}.

Variando la C_1^n si avranno in Σ_{n-1} due fasci, l'uno di curve C_1, d'ordine $n-1$, e l'altro di coni K_{n-2}^2, i quali descriveranno la I_1^n come luogo dei gruppi di n punti variabili, comuni ad una curva ed al cono corrispondente.

I coni K_{n-2}^2 che da $n-2$ punti P_0 proiettano una data C_1^n, sono in numero $\binom{n+2}{n-2}=\binom{n+2}{4}$, e siccome ad ognuno di essi si può associare ciascuno dei quattro coni a 2 dimensioni e dell'ordine $n-1$, col vertice in uno dei quattro punti P_0 rimasti, così la I_1^n si può generare in $4\binom{n+2}{4}$ modi differenti mediante due fasci proiettivi, l'uno di curve d'ordine $n-1$ normali di Σ_{n-1}, e l'altro di coni quadrici ad $n-2$ dimensioni dello stesso Σ_{n-1}.

Osservazione. — Per $n=3$ è facile constatare che le $4\binom{3+2}{4}=20$ maniere di generare la I_1^3, si riducono a 10 solamente, perchè queste maniere a due a due coincidono.

Bagni Cannicattini, ottobre 1898.

M. MORALE.

COMPLÉMENT À L'ANALYSIS SITUS;

Par M. H. Poincaré, à Paris.

Adunanza del 26 marzo 1899.

§ I.

Introduction.

Dans le Journal de l'École Polytechnique (volume du centenaire de la fondation de l'École, 1894) j'ai publié un mémoire intitulé *Analysis situs,* où j'étudie les variétés de l'espace à plus de trois dimensions et les propriétés des nombres de Betti. C'est à ce mémoire que se rapporteront les renvois que je serai amené à faire fréquemment dans la suite, en mentionnant seulement le titre *Analysis situs.*

Dans ce mémoire se trouve énoncé le théorème suivant: *Pour toute variété fermée, les nombres de Betti également distants des extrêmes, sont égaux.*

Le même théorème a été énoncé par M. Picard dans sa *Théorie des fonctions algébriques de deux variables.*

M. Heegaard vient de revenir sur ce même problème dans un travail très remarquable, publié en langue danoise, sous le titre « *Forstudier til en topologisk teori för de algebraiske Sammenhäng* » (Copenhague, det Nordiske Forlag Ernst Bojesen, 1898). D'après lui, le théorème en question est inexact et les démonstrations sont sans valeur.

Avant d'examiner les objections de M. Heegaard, il convient de faire une distinction. Il y a deux manières de définir les nombres de Betti.

Considérons une variété V que je supposerai, par exemple, fermée; soient $v_1, v_2, \dots, v_n$, n variétés à p dimensions, faisant partie de V. Je suppose qu'on ne puisse pas trouver de variété à $p+1$ dimensions, faisant partie de V et dont $v_1, v_2, \dots, v_n$ constituent la frontière complète; mais que, si on leur adjoint une $(n+1)^{\text{ème}}$ variété à p dimensions, que j'appellerai v_{n+1} et qui fera partie de V, on puisse trouver une variété à $p+1$ dimensions, faisant partie de V, dont $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}$ constituent la frontière complète et *cela de quelque manière que l'on ait choisi la $(n+1)^{\text{ème}}$ variété v_{n+1}*. Dans ce cas, on dit que le nombre de Betti est égal à $n+1$ pour les variétés à p dimensions.

C'est la définition adoptée par Betti.

Mais on peut donner une seconde définition.

Supposons que l'on puisse trouver dans V une variété à $p+1$ dimensions, dont $v_1, v_2, \dots, v_n$ constituent la frontière complète; j'exprimerai ce fait par la relation suivante :

$$v_1 + v_2 + \dots + v_n \sim 0,$$

que j'appellerai une *homologie*.

Il pourra se faire que sur la frontière complète de notre variété à $p+1$ dimensions, une même variété v_1 se retrouve plusieurs fois; dans ce cas, elle figurera dans le premier membre de l'homologie avec un coefficient, qui devra être un nombre entier.

D'après cette définition, on peut additionner les homologies, les soustraire les unes des autres, les multiplier par un nombre entier.

Nous *conviendrons* également qu'il est permis de diviser une homologie par un nombre entier, quand tous les coefficients sont divisibles par cet entier. Par conséquent, s'il y a une variété à $p+1$ dimensions, dont la frontière complète sera constituée par 4 fois la variété v_1, nous conviendrons qu'on peut écrire non seulement l'homologie :

$$4v_1 \sim 0,$$

mais encore l'homologie :

$$v_1 \sim 0;$$

de sorte que cette homologie signifie qu'il y a des variétés à $p+1$ dimensions, qui admettent pour frontière complète la variété v_1 ou un certain nombre de fois cette variété.

L'homologie

$$2v_1 + 3v_2 \sim 0$$

signifie qu'il y a des variétés à $p+1$ dimensions, qui ont pour frontière complète 2 fois v_1 et 3 fois v_2, ou 4 fois v_1 et 6 fois v_2, ou 6 fois v_1 et 9 fois v_2, etc.

Telles sont les conventions que j'ai adoptées dans l'*Analysis situs*, page 19.

Je dirai que plusieurs variétés sont indépendantes, si elles ne sont pas liées par aucune homologie à coefficients entiers.

Si alors il y a n variétés indépendantes à p dimensions, le nombre de Betti, d'après la seconde définition, est égal à $n+1$.

Cette seconde définition, qui est celle que j'ai adoptée dans l'*Analysis situs*, ne concorde pas avec la première.

Le théorème énoncé plus haut, et critiqué par M. Heegaard, est vrai pour les nombres de Betti, définis de la seconde manière, et faux pour les nombres de Betti, définis de la première manière.

C'est ce que prouve l'exemple cité par M. Heegaard, page 86.

Si l'on adopte la première définition, on a :

$$P_1 = 2, \quad P_2 = 1$$

et par conséquent

$$P_2 < P_1.$$

Si l'on adopte, au contraire, la seconde définition, on trouve :

$$P_1 = 1, \quad P_2 = 1,$$

et par conséquent

$$P_2 = P_1,$$

conformément au théorème énoncé.

C'est ce que prouvait également un exemple que j'ai cité, moi-même, dans l'*Analysis situs*. C'est le 3ème exemple, page 51. Mais en renvoyant à cet exemple et à cette page de l'*Analysis situs*, je dois signaler une faute d'impression, qui pourrait gêner le lecteur (*).

Au lieu de

$$ABB'A' \equiv DD'C'C,$$

il faut lire

$$ABB'A' \equiv C'CDD';$$

au lieu de

$$AB \equiv B'D' \equiv C'A',$$

il faut lire

$$AB \equiv B'D' \equiv C'C.$$

Nous avons formé (page 66) les équivalences fondamentales, qui s'écrivent de la façon suivante :

$$2\,C_1 \equiv 2\,C_2 \equiv 2\,C_3 \equiv 0, \quad 4\,C_1 \equiv 0;$$

nous pouvons en déduire les homologies :

$$4\,C_1 \sim 4\,C_2 \sim 4\,C_3 \sim 0.$$

Comme, d'après notre convention, on peut diviser ces homologies par 4, nous arrivons au système suivant d'homologies fondamentales :

$$C_1 \sim C_2 \sim C_3 \sim 0.$$

Si alors P_1 et P_2 sont les nombres de Betti, *définis de la seconde manière,* on trouve

$$P_1 = P_2 = 1.$$

(*) Je profite de l'occasion pour signaler un autre erratum de l'*Analysis situs*. Au bas de la page 102, il faut lire : « ou plus précisément les deux v_{q+1}, auxquelles v_q appartiendra, appartiendront aux mêmes v_{q+1}, aux mêmes $v_{q+3}, \ldots$, aux mêmes v_p ; de telle façon que la suppression de v_q et l'annexion mutuelle des deux v_{q+1}, ne changera rien aux v_{q+2}, aux $v_{q+3}, \ldots$, aux v_p ».

Mais l'égalité entre les nombres P_1 et P_2 ne subsisterait pas si on avait adopté la première définition, qui est celle de Betti; nous aurions toujours $P_2 = 1$, mais nous n'aurions plus $P_1 = 1$.

En effet, il n'y a pas de variété à deux dimensions qui ait pour frontière complète la ligne fermée C_1, sans quoi nous aurions l'équivalence $C_1 \equiv 0$.

Ce qui est vrai seulement, c'est qu'il y a une variété à deux dimensions, admettant pour frontière 4 fois la ligne C_1. Donc P_1 n'est pas égal à 1.

Revenons au théorème d'après lequel les nombres de Betti, également distants des extrêmes, sont égaux.

La démonstration que j'en ai donnée dans l'*Analysis situs*, semble s'appliquer également bien aux deux définitions des nombres de Betti; elle doit donc avoir un point faible, puisque les exemples qui précèdent, montrent suffisamment que le théorème n'est pas vrai pour la première définition.

M. Heegaard s'en est bien rendu compte; mais je ne crois pas que sa première objection soit fondée.

Après avoir cité la façon dont je définis les variétés $V_1, V_2, \dots, V_p$ (*Analysis situs*, page 43), par les équations $\Phi = 0$, $F''_i = 0$, il ajoute (page 70) « *Enhver af Mangfoldighederne V skulde altsaa kunne være den fulstaendige Skoering mellem p Mangfoldigheder af h — 1 Dimensioner i U* ». Cela n'est pas exact, car, outre mes égalités, j'ai un certain nombre d'inégalités, que j'ai introduites au début du mémoire et que j'ai négligé d'écrire de nouveau dans la suite; mes variétés ne sont donc pas des intersections complètes.

La seconde objection est, au contraire, fondée. « *Naar omvendt,* dit M. Heegaard, *Homologien* $\sum V_i \sim 0$ *ikke finder Sted, saa i U' kan legges en lukket Kurve V', saa at*

$$\sum N(V', V_i) \neq 0$$

men det er ikke sikkert, at denne Kurve kan udskæres af nogen Mangfoldighed V ». C'est là, en effet, le véritable point faible de la démonstration.

Il est donc nécessaire de revenir sur la question, et c'est l'objet du présent travail.

Souvent, pour simplifier les démonstrations, j'ai envisagé seulement le cas des variétés fermées à 3 dimensions, contenues dans l'espace à 4 dimensions. On pourrait facilement les étendre au cas général.

J'envisage, donc, dans la suite, une variété V fermée, mais pour calculer ses nombres de Betti, je la suppose divisée en variétés plus petites, de façon à former un polyèdre, au sens donné à ce mot à la page 100 de l'*Analysis situs*.

§ II.

Schéma d'un polyèdre.

Considérons, donc, comme à la page 100 de l'*Analysis situs*, un polyèdre à p dimensions, c'est-à-dire une variété V à p dimensions, divisée en variétés v_p; les frontières des v_p seront les v_{p-1}, celles des v_{p-1} seront les $v_{p-2}, \ldots$, celles des v_1 (arêtes) seront les v_0 (sommets).

J'appellerai α_i le nombre des v_i.

Soient $a_1^q, a_2^q, \ldots, a_{\alpha_q}^q$ les différentes v_q.

Soit a_1^q une des variétés v_q et a_1^{q-1} une des variétés v_{q-1}, qui lui sert de frontière. Étudions les rapports de a_1^q et de a_1^{q-1}.

Soient

$$(1) \qquad F_1 = F_2 = \ldots = F_{n-q} = F_{n-q+1} = 0, \qquad \varphi_\gamma > 0$$

les égalités et les inégalités qui définissent a_1^{q-1}, d'après la première définition des variétés (*Analysis situs*, page 4).

Les relations qui définissent a_1^q pourront se mettre sous la forme:

$$(2) \qquad F_1 = F_2 = \ldots = F_{n-q} = 0, \quad F_{n-q+1} > 0, \quad \varphi_\gamma > 0.$$

Dans ce cas, nous dirons que la relation de a_1^q et de a_1^{q-1} est *directe*.

Cette relation deviendrait *inverse*, si l'une de ces deux variétés était remplacée par la variété opposée; elle redeviendrait directe, si chacune des deux variétés était remplacée par la variété opposée.

On sait qu'une variété est remplacée par la *variété opposée* (*Analysis situs*, page 15), quand on permute deux des fonctions F (qui, égalées à zéro, donnent les équations qui définissent la variété), ou qu'on change le signe de l'une d'elles.

Ainsi les deux variétés

$$F_1 = F_2 = F_3 = 0; \qquad F_1 = F_2 = 0, \qquad F_3 > 0;$$

$$F_1 = F_2 = F_3 = 0; \qquad F_1 = F_3 = 0, \qquad F_2 < 0;$$

$$F_1 = F_2 = F_3 = 0; \qquad F_2 = F_3 = 0, \qquad F_1 > 0;$$

sont en relation directe; tandis que les deux variétés

$$F_1 = F_2 = F_3 = 0; \qquad F_1 = F_2 = 0, \qquad F_3 < 0;$$

$$F_1 = F_2 = F_3 = 0; \qquad F_1 = F_3 = 0, \qquad F_2 > 0;$$

sont en relation inverse.

Cela posé, soit $\varepsilon^q_{i,j}$ un nombre qui sera égal à 0, si a^{q-1}_j n'est pas frontière de a^q_i; à $+1$, si a^{q-1}_j est frontière de a^q_i et en relation directe avec a^q_i; et, enfin, à -1, si a^{q-1}_j est frontière de a^q_i, mais en relation inverse avec a^q_i.

Nous conviendrons d'écrire la *congruence*

$$(3) \qquad a^q_i \equiv \sum_j \varepsilon^q_{i,j} a^{q-1}_j,$$

qui nous fait connaître les frontières de a^q_i.

L'ensemble des congruences (3), relatives aux différentes v_p, v_{p-1}, ..., v_0 de V, constitue ce qu'on peut appeler le *schéma d'un polyèdre*.

On peut se poser deux questions :

1° Un schéma étant donné, existera-t-il toujours un polyèdre, qui y corresponde ?

2° Deux polyèdres qui ont même schéma, sont-ils homéomorphes ?

Sans aborder, pour le moment, ces deux questions, cherchons

quelques-unes des conditions auxquelles doit satisfaire un schéma, pour qu'un polyèdre y puisse correspondre.

Considérons l'une des v_{p-1}, a_i^{p-1} par exemple; cette variété devra séparer, l'une de l'autre, deux des v_p et deux seulement; de sorte que, parmi les nombres

$$\varepsilon_{i,1}^p,$$

il y en aura un qui sera égal à $+1$, un qui sera égal à -1 et tous les autres seront égaux à o.

Ce n'est pas tout; envisageons l'une quelconque des v_q, a_i^q par exemple, et une quelconque des v_{q-2}, a_k^{q-2} par exemple.

De deux choses, l'une: ou bien a_k^{q-2} n'appartiendra pas à a_i^q, et dans ce cas tout les produits

$$\varepsilon_{i,j}^q \varepsilon_{j,k}^{q-1} \tag{4}$$

seront nuls, car si a_j^{q-1} n'appartient pas à a_i^q, le premier facteur est nul; si, au contraire, a_j^{q-1} appartient à a_i^q, la variété a_k^{q-2} ne peut pas appartenir à a_j^{q-1} (sans quoi, elle appartiendrait à a_i^q, contrairement à l'hypothèse), et le second facteur doit être nul.

Ou bien a_k^{q-2} appartiendra à a_i^q; mais alors nous pourrons raisonner sur la variété a_i^q, comme nous raisonnions tout à l'heure sur la variété V, et nous conclurons que a_k^{q-2} doit séparer, l'une de l'autre, deux des variétés v_{q-1}, qui appartiennent à a_i^q, et deux seulement: soient a_1^{q-1} et a_2^{q-1}.

Parmi les produits (4) il n'y en aura que deux qui ne seront pas nuls, à savoir

$$\varepsilon_{i,1}^q \varepsilon_{1,k}^{q-1}, \qquad \varepsilon_{i,2}^q \varepsilon_{2,k}^{q-1}.$$

Pour tous les autres, en effet, ou bien a_j^{q-1} n'appartiendra pas à a_i^q, ou bien a_k^{q-2} n'appartiendra pas à a_j^{q-1}.

Ces deux produits sont d'ailleurs égaux: l'un à $+1$, l'autre à -1.

On aura donc dans tous les cas:

$$\sum_j \varepsilon_{i,j}^q \varepsilon_{j,k}^{q-1} = 0. \tag{5}$$

Nous avons de même

$$\sum_i \varepsilon^p_{i,1} = 0,$$

et, plus généralement, quel que soit k:

$$(5^{\text{bis}}) \qquad \sum_i \varepsilon^p_{i,k} = 0.$$

La relation (5^{bis}) peut être regardée, à un certain point de vue, comme un cas particulier de la relation (5).

Soit P la portion de l'espace à $p+1$ dimensions, limitée par le polyèdre V; alors la frontière complète de P se composera des diverses variétés v_p, qui, par leur ensemble, forment V; nous pourrons donc écrire, au sens de la congruence (3),

$$(3^{\text{bis}}) \qquad P \equiv \sum_i a^p_i,$$

ou encore

$$P \equiv \sum_i \varepsilon^{p+1}_{0,i}\, a^p_i,$$

où les nombres $\varepsilon^{p+1}_{0,i}$ seront tous, par définition, égaux à 1.

A ce compte, la relation (5^{bis}), qui peut s'écrire

$$\sum_i \varepsilon^{p+1}_{0,i}\, \varepsilon^p_{i,k} = 0,$$

n'est plus qu'un cas particulier de la relation (5).

Nous avons, ensuite, chaque v_1 qui a pour limites deux v_0, et deux seulement, ce qui nous donne des congruences (3) de la forme:

$$a^1_i \equiv a^0_j - a^0_k,$$

et une relation analogue à (5) et (5^{bis}):

$$\sum_j \varepsilon^1_{i,j} = 0,$$

qui rentrerait encore dans la forme (5), en convenant de faire tous les ε^0 égaux à $+1$.

D'autre part, envisageons l'une des a_i^q, toutes les a_j^{q+1} auxquelles elle sert de frontière; toutes les a_k^{q+2}, auxquelles ces a_j^{q+1} servent de frontières et ainsi de suite. L'ensemble de toutes ces variétés constituera ce que nous avons appelé un *aster* (*Analysis situs*, page 106).

Nous avons vu (loc. cit., page 107) que le polyèdre qui correspond à un aster, doit être simplement connexe. Ainsi une condition pour qu'un polyèdre puisse correspondre à un schéma donné, c'est que les polyèdres qui correspondent aux différents asters, d'après la convention de la page 107 de l'*Analysis situs*, soient tous simplement connexes.

Considérons maintenant une des a_i^q, toutes les a_j^{q-1} qui lui servent de frontières, les a_k^{q-2} qui servent de frontières à ces a_j^{q-1} et ainsi de suite. Cet ensemble de variétés constituera un polyèdre à q dimensions; nous supposerons que ce polyèdre soit simplement connexe.

Ce n'est plus là une condition nécessaire pour qu'un polyèdre puisse correspondre au schéma; c'est simplement une condition que, sauf avis contraire, nous supposerons remplie.

Pour éclairer ces définitions par quelques exemples, voyons d'abord quel est le schéma du tétraèdre généralisé, défini à la page 105 (*Analysis situs*).

Les faces de ce tétraèdre seront définies par les $n + 1$ équations:

$$(6) \qquad \begin{gathered} x_1 = 0, \quad x_2 = 0, \ldots, x_n = 0 \\ x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 1. \end{gathered}$$

On obtiendra les a_i^q en supprimant $q + 1$ de ces équations; pour définir le sens de la variété a_i^q, nous supposerons qu'on supprime ces $q + 1$ équations, mais sans changer l'ordre des $n - q$ équations restantes.

Cela posé, considérons la relation de a_i^q et de a_j^{q-1} et cherchons à déterminer le nombre $\varepsilon_{i,j}^q$.

D'abord, pour que a_j^{q-1} appartienne à a_i^q, il faut que a_j^{q-1} soit définie par les $n - q$ équations qui définissent a_i^q, auxquelles on devra adjoindre une $(n - q + 1)^{\text{ème}}$ équation, prise parmi les équations (6). S'il n'est pas ainsi, le nombre $\varepsilon_{i,j}^q$ sera nul.

Supposons, donc, que a_j^{q-1} soit obtenu en supprimant les q équations qui occupent les

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_q$$

rangs.

Supposons que a_i^q soit obtenue en supprimant, *en outre*, la $\beta^{\text{ème}}$ équation; alors le nombre $\varepsilon_{i,j}^q$, dont la valeur absolue sera toujours égale à 1, aura même signe que le produit:

$$(\beta - \alpha_1)(\beta - \alpha_2) \ldots (\beta - \alpha_q).$$

Il est aisé de vérifier alors que la relation (5) a lieu.

Considérons, en effet, la variété a_k^{q-2}, obtenue en supprimant les équations de rang $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-1}$ et la variété a_i^q, obtenue en supprimant, en outre, les équations de rang β et γ. (Il est clair que si a_i^q ne s'obtenait pas en supprimant les mêmes équations que pour a_k^{q-2}, plus deux autres, tous les produits $\varepsilon_{i,j}^q \varepsilon_{j,k}^{q-1}$ seraient nuls).

Dans ce cas, tous ces produits seront encore nuls, sauf deux:

$$\varepsilon_{i,1}^q \varepsilon_{1,k}^{q-1} \quad \text{et} \quad \varepsilon_{i,2}^q \varepsilon_{2,k}^{q-1},$$

qui correspondront aux deux variétés a_1^{q-1} et a_2^{q-2}, obtenues respectivement en supprimant les équations de rang $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-1}, \beta$ et celles de rang $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{q-1}, \gamma$.

Alors les quatre nombres

$$\varepsilon_{i\,1}^q, \ \varepsilon_{1,k}^{q-1}, \ \varepsilon_{i,2}^q, \ \varepsilon_{2,k}^{q-1}$$

auront respectivement même signe que:

$$(\gamma - \beta)(\gamma - \alpha_1)(\gamma - \alpha_2) \ldots (\gamma - \alpha_{q-1}),$$
$$(\beta - \alpha_1)(\beta - \alpha_2) \ldots (\beta - \alpha_{q-1}),$$
$$(\beta - \gamma)(\beta - \alpha_1)(\beta - \alpha_2) \ldots (\beta - \alpha_{q-1}),$$
$$(\gamma - \alpha_1)(\gamma - \alpha_2) \ldots (\gamma - \alpha_{q-1}).$$

On vérifie ainsi que les deux produits, qui ne sont pas nuls, sont égaux et de signe contraire. C. Q. F. D. (*)

§ III.

Nombres de Betti réduits.

Je m'en vais chercher, maintenant, les nombres de Betti, relatifs à un polyèdre, mais afin d'éviter l'équivoque, dont j'ai signalé plus haut la possibilité, je conviendrai de définir ces nombres *de la seconde manière*, c'est-à-dire que $P_q - 1$ sera le nombre de variétés fermées à q dimensions, que l'on peut tracer sur notre polyèdre V et qui sont *linéairement indépendantes*, je veux dire, qui ne sont liées par aucune homologie à coefficients entiers, au sens de l'*Analysis situs*, page 18.

Mais je me proposerai d'abord de déterminer le nombre $P'_q - 1$ des variétés à q dimensions, fermées et linéairement indépendantes, que l'on peut tracer sur notre polyèdre V, mais *en nous bornant à celles qui sont des combinaisons des variétés* v_q.

Le nombre P'_q sera, alors, ce que j' appellerai le *nombre de Betti réduit*.

Les variétés à q dimensions, qui sont des combinaisons des v_q, pourront évidemment être représentées par :

$$\sum_i \lambda_i a_i^q,$$

les λ_i étant des coefficients entiers et les lettres a_i^q continuant à désigner les différentes variétés v_q.

Quelle est d'abord la condition pour que la variété $\sum_i \lambda_i a_i^q$ soit fermée ?

Pour cela, cherchons quelles sont les variétés v_{q-1}, qui forment les frontières de cette variété. Pour les trouver, il suffit évidemment de remplacer a_i^q par sa valeur donnée par la congruence (3).

(*) Le polyèdre ainsi défini, ainsi que tout polyèdre à n dimensions, limité par $n+1$ variétés planes, s'appellera *tétraèdre généralisé rectiligne*. J'appellerai *tétraèdre généralisé* toute variété homéomorphe à un tétraèdre généralisé rectiligne.

Cet ensemble de variétés frontières sera donc donné par la formule :

$$\sum_i \sum_j \lambda_i \varepsilon^q_{i,j} a^{q-1}_j.$$

Pour que la variété $\sum_i \lambda_i a^q_i$ soit fermée, il suffit, donc, que l'on ait identiquement :

$$\sum_i \sum_j \lambda_i \varepsilon^q_{i,j} a^{q-1}_j = 0,$$

c'est-à-dire que, quel que soit j, on ait :

$$\sum_i \lambda_i \varepsilon^q_{i,j} = 0.$$

En d'autres termes, la variété $\sum_i \lambda_i a^q_i$ sera fermée, si l'on a :

$$(7,\ q) \qquad \sum_i \lambda_i a^q_i \equiv 0,$$

en vertu des congruences $(3,\ q)$; j'appelle ainsi celles des congruences (3), qui lient les a^q_i aux a^{q-1}_j.

Cherchons maintenant les homologies qui peuvent exister entre les variétés a^q_i. On obtiendra toutes ces homologies, en combinant celles que l'on peut obtenir de la façon suivante.

Considérons la congruence :

$$(8) \qquad a^{q+1}_k \equiv \sum_i \varepsilon^{q+1}_{k,i} a^q_i,$$

qui, d'après la convention que nous venons de faire, est une congruence $(3,\ q+1)$; remplaçons le signe $\equiv$ par $\sim$, et le premier membre par zéro; il viendra :

$$(9,\ q) \qquad \sum_i \varepsilon^{q+1}_{k,i} a^q_i \sim 0.$$

Cette homologie aura évidemment lieu, puisque, par définition, elle exprime, comme la congruence (8), que les a^q_i forment la frontière complète de a^{q+1}_k.

Nous démontrerons plus loin (§ 6), qu'il n'y en a pas d'autres.

Je désigne cette homologie par (9, q) pour marquer qu'elle a lieu entre les a_i^q.

Je dis que si l'homologie (9, q) a lieu, la congruence

$$(10,\ q)\qquad \sum_i \varepsilon_{k,i}^{q+1} a_i^q \equiv 0$$

sera une conséquence des congruences (3, q).

Remplaçons, en effet, les a_i^q par leurs valeurs, données par ces congruences (3, q); il viendra :

$$\sum_i \varepsilon_{k,i}^{q+1} a_i^q \equiv \sum_i \sum_j \varepsilon_{k,i}^{q+1} \varepsilon_{i,j}^q a_j^{q-1}.$$

Le second membre est identiquement nul en vertu des relations (5).

Cela posé, soit α_q le nombre des variétés a_i^q; soit α_q' le nombre de ces variétés qui restent distinctes, si l'on ne regarde pas comme distinctes des variétés liées par une homologie de la forme (9, q); soit α_q'' le nombre de ces variétés qui restent distinctes, si l'on ne regarde pas comme distinctes des variétés liées par une congruence de la forme (7, q).

Il résulte de ces définitions :

1° qu'il y a $\alpha_q - \alpha_q'$ homologies distinctes de la forme (9, q);

2° qu'il y a $\alpha_q - \alpha_q''$ congruences distinctes de la forme (7, q);

3° que

$$\alpha_q' \geqq \alpha_q'';$$

car si plusieurs a_i^q sont liées par une homologie de la forme (9, q), elles seront liées également par la congruence (10, q) correspondante.

Enfin le nombre cherché $P_q' - 1$ est égal à

$$\alpha_q' - \alpha_q'',$$

car les variétés fermées de la forme $\sum_i \lambda_i a_i^q$, réellement distinctes, sont en nombre égal à celui des congruences (7, q), c'est-à-dire au nombre de $\alpha_q - \alpha_q''$.

Le nombre $P_q' - 1$ est le nombre de ces variétés qui restent

distinctes, en ne regardant pas comme distinctes celles qui sont liées par une homologie $(9, q)$. Or le nombre de ces homologies est $\alpha_q - \alpha'_q$; nous avons donc :

$$P'_q - 1 = (\alpha_q - \alpha''_q) - (\alpha_q - \alpha'_q) = \alpha'_q - \alpha''_q \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Soient $a^q_1, a^q_2, \ldots, a^q_i$ des variétés v_q, au nombre de i et

$$a^q_1 \equiv \sum \varepsilon^q_{1,j} a^{q-1}_j,$$
$$a^q_2 \equiv \sum \varepsilon^q_{2,j} a^{q-1}_j,$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$a^q_i \equiv \sum \varepsilon^q_{i,j} a^{q-1}_j$$

les congruences (3) correspondantes. Formons les homologies correspondantes :

$$\sum \varepsilon^q_{1,j} a^{q-1}_j \sim 0, \qquad \sum \varepsilon^q_{2,j} a^{q-1}_j \sim 0, \quad \ldots, \quad \sum \varepsilon^q_{i,j} a^{q-1}_j \sim 0.$$

La condition nécessaire et suffisante pour que ces homologies soient distinctes, c'est que l'on n'ait entre les i variétés $a^q_1, a^q_2, \ldots, a^q_i$ aucune congruence de la forme :

$$\lambda_1 a^q_1 + \lambda_2 a^q_2 + \ldots + \lambda_i a^q_i \equiv 0.$$

Le nombre des homologies distinctes est donc égal au nombre des a^q_i distinctes, en tenant compte des congruences $(7, q)$. Donc :

$$\alpha_{q-1} - \alpha'_{q-1} = \alpha''_q,$$

ou

$$\alpha_{q-1} = \alpha'_{q-1} + \alpha''_q.$$

Nous aurons d'autre part

$$\alpha'_0 = 1.$$

Si, en effet, on peut aller d'un sommet quelconque a^0_1 à un autre

sommet quelconque a_i^0, en suivant des arêtes (c'est-à-dire si le polyèdre est d'un seul tenant), on aura l'homologie :

$$a_1^0 \sim a_i^0,$$

c'est-à-dire qu'il n'y aura qu'un seul sommet distinct, en tenant compte des homologies.

Envisageons maintenant la congruence (3^{bis})

$$P \equiv \sum a_i^p;$$

l'homologie correspondante s'écrit :

$$\sum a_i^p \sim 0,$$

et il n'y a pas d'autre homologie (9, p). Donc

$$\alpha_p = \alpha'_p + 1.$$

De plus, le polyèdre étant d'un seul tenant, une seule des combinaisons $\sum \lambda_i a_i^p$ pourra être fermée, c'est le polyèdre lui-même dans son entier, représenté par la formule $\sum a_i^p$.

Nous aurons donc une seule congruence de la forme (7, p) :

$$\sum a_i^p \equiv 0.$$

Donc

$$\alpha_p = \alpha''_p + 1, \qquad \alpha'_p = \alpha''_p.$$

Nous avons donc la série d'équations :

$$\begin{array}{ll}
\alpha'_0 = 0, & \\
\alpha_0 = \alpha'_0 + \alpha''_1, & \alpha'_1 - \alpha''_1 = P'_1 - 1, \\
\alpha_1 = \alpha'_1 + \alpha''_2, & \alpha'_2 - \alpha''_2 = P'_2 - 1, \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots \\
\alpha_{p-1} = \alpha'_{p-1} + \alpha''_p, & \alpha'_{p-1} - \alpha''_{p-1} = P'_{p-1} - 1, \\
\alpha_p = \alpha'_p + 1, & \alpha'_p - \alpha''_p = 0,
\end{array}$$

d'où l'on tire aisément :

$$\begin{aligned}\alpha_p - \alpha_{p-1} + \alpha_{p-2} - \ldots \pm \alpha_1 \mp \alpha_0 = 1 - (P'_{p-1} - 1) + \ldots \\ \ldots \mp (P'_2 - 1) \pm (P'_1 - 1) \mp 1,\end{aligned}$$

tout à fait analogue à la formule :

$$\begin{aligned}\alpha_p - \alpha_{p-1} + \alpha_{p-2} - \ldots \pm \alpha_1 \mp \alpha_0 = 1 - (P_{p-1} - 1) + \ldots \\ \ldots \mp (P_2 - 1) \pm (P_1 - 1) \mp 1,\end{aligned}$$

que nous avons trouvée dans l'*Analysis situs*, page 121.

§ IV.

Subdivision des Polyèdres.

Considérons un polyèdre V, à p dimensions, avec ses diverses variétés :

$$a_i^p,\ a_i^{p-1},\ \ldots,\ a_i^1,\ a_i^0.$$

Supposons que l'on subdivise chacune des variétés a_i^p en plusieurs autres, que j'appellerai les b_i^p; soient ensuite b_i^{p-1} les variétés à $p-1$ dimensions, qui servent de frontière aux b_i^p; soient b_i^{p-2} les variétés à $p-2$ dimensions, qui servent de frontières aux b_i^{p-1}; ... et, enfin, b_i^0 les variétés à 0 dimensions (sommets), qui servent de frontières aux b_i^1 (arêtes).

On aura ainsi un nouveau polyèdre V', qui sera dérivé du polyèdre V, au sens que j'ai attaché à ce mot à la page 101 de l'*Analysis situs.*

On peut supposer, d'ailleurs, que si une variété v_{q-1}, simplement ou multiplement connexe, sert de frontière à deux variétés b_j^q et b_k^q, elle ne forme pas forcément une seule des variétés b_i^{q-1}, mais peut être elle-même subdivisée en plusieurs variétés b_i^{q-1}. Dans ce cas, pour reprendre la terminologie des pages 102 et 103 de l'*Analysis situs*, ces variétés b_i^{q-1} seront *irrégulières* et les variétés b_i^{q-2}, qui les séparent les unes des autres, seront *singulières*.

Cela posé, recherchons une classification des variétés b_i^q.

Si une variété b_i^q ne fait pas partie d'une des variétés a_j^q, elle fera partie d'une des variétés a_j^{q+1}, ou d'une des variétés a_j^{q+2}, ..., ou, tout au moins, d'une des variétés a_j^p.

Peut-elle faire partie à la fois de deux variétés a_j^m et a_k^m?

D'après la façon dont la subdivision a été supposée faite, en ajoutant toujours de nouvelles frontières, sans en supprimer jamais, cela ne pourra arriver que si ces deux variétés a_j^m et a_k^m sont contiguës et ont une frontière commune a_h^{m-1}, et si b_i^q fait partie de cette frontière a_h^{m-1}.

Je suppose alors que b_i^q fasse partie de a_j^h, et ne fasse partie d'aucune variété a_k^m, où $m < h$. La variété a_j^h existe toujours et l'on a $h \geqq q$; de plus, la variété a_j^h est unique, c'est-à-dire que b_i^q ne peut faire partie à la fois de deux variétés différentes a_j^h et a_k^h.

Si donc je conviens de ranger dans une même classe toutes les variétés b_i^q, qui font partie de la variété a_j^h, sans faire partie d'aucune des variétés a_k^m, où $m < h$, toute variété b_i^q fera partie d'une classe et d'une seule.

Je pourrai alors représenter b_i^q par une notation à quatre indices

$$b_i^q = B(q, h, j, k);$$

l'indice q indique le nombre des dimensions de b_i^q; les indices h et j indiquent que b_i^q fait partie de la classe a_j^h; et l'indice k sert à distinguer les unes des autres les différentes variétés d'une même classe. On a $h \geqq q$.

Nous aurons, alors, pour définir le polyèdre V et sa subdivision:

1° Les congruences $(3, q)$, relatives au polyèdre V, que j'écrirai:

$$(3, q, i) \qquad a_i^q \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^q a_j^{q-1}.$$

2° Les équations qui donnent la subdivision de la variété a_i^q:

$$(1, q, i) \qquad a_i^q = \sum_k B(q, q, i, k).$$

3° Les congruences analogues aux congruences (3), mais relatives

au polyèdre V'; je les écrirai :

$$(2, q, h, j, k) \qquad B(q, h, j, k) \equiv \sum \zeta B(q-1, h', j', k').$$

Les ζ sont des nombres égaux à ± 1, ou à 0; ils dépendent des sept indices q, h, j, k, h', j', k', de sorte que je les écrirai, quand cela sera nécessaire, sous la forme :

$$\zeta(q, h, j, k, h', j', k').$$

Sous le signe $\sum$, les indices h', j', k' peuvent prendre toutes les valeurs. Observons, cependant, que les $B(q-1)$, qui servent de frontière à $B(q, h, j, k)$, doivent, comme $B(q, h, j, k)$, faire partie de a_j^h; mais pourront faire partie d'autres variétés $a_{j'}^{h'}$, d'un nombre moindre de dimensions, mais faisant partie de a_j^h. On aura donc

$$h' \leqq h, \qquad h' \geqq q-1.$$

D'ailleurs si $h' = h$, on aura $j' = j$.

Pour que les relations (1), (2), (3) puissent définir une véritable subdivision, elles doivent satisfaire à certaines conditions.

Les relations $(1, q, i)$, $(3, q, i)$ donnent

$$(\alpha) \qquad \sum_k B(q, q, i, k) \equiv \sum \varepsilon_{i,j}^q a_j^{q-1}.$$

Si dans le premier membre je remplace $B(q, q, i, k)$ par sa valeur, tirée de $(2, q, q, i, k)$, et a_j^{q-1} par sa valeur tirée de $(1, q-1, j)$, les deux membres devront devenir identique; voilà une première condition, qui est évidente; elle n'est d'ailleurs pas suffisante.

§ V.

Influence de la subdivision sur les nombres de Betti réduits.

Soit $\sum \alpha B(q, h, j, k)$ une combinaison des variétés b_i^q, qui représente une variété fermée à q dimensions, de telle sorte que l'on

ait, avec nos notations,

$$\sum \alpha B(q, h, j, k) \equiv 0, \qquad (h \geq q) \tag{1}$$

Parmi les variétés b_i^q qui figurent dans le premier membre de (1), réunissons celles qui appartiennent à une même classe. Soit

$$S\alpha B(q, h, j, k)$$

l'ensemble de celles qui appartiennent à la classe a_j^h; le signe de sommation S signifie, donc, qu'on ne prend que les variétés d'une même classe, tandis que le signe $\sum$ signifie qu'on les prend toutes.

On aura alors:

$$S\alpha B(q, h, j, k) \equiv \sum \beta B(q-1, h', j', k'), \tag{2}$$

c'est-à-dire que la variété à $q-1$ dimensions $\sum \beta B(q-1, h', j', k')$ forme la frontière complète de la variété à q dimensions

$$S\alpha B(q, h, j, k).$$

Les variétés $a_{j'}^{h'}$ doivent appartenir à la frontière de a_j^h, ou se confondre avec a_j^h; en effet, $B(q-1, h', j', k')$ appartient à $a_{j'}^{h'}$ et, d'autre part, à l'une des $B(q, h, j, k)$, qui fait lui-même partie de a_j^h, si donc $a_{j'}^{h'}$ ne faisait pas partie de a_j^h, $B(q-1, h', j', k')$ ferait partie d'une variété a_k^m, partie commune à a_j^h et $a_{j'}^{h'}$, et qui aurait moins de h' dimensions. Cela est contraire à la définition que nous avons donnée des classes.

D'autre part $a_{j'}^{h'}$ ne peut pas se confondre avec a_j^h.

Soit, en effet,

$$S_1\alpha_1 B(q, h_1, j_1, k_1) = \sum \alpha B(q, h, j, k) - S\alpha B(q, h, j, k)$$

l'ensemble des variétés qui figurent dans le premier membre de (et qui n'appartiennent pas à la classe a_j^h; on aura évidemment:

$$S_1\alpha_1 B(q, h_1, j_1, k_1) \equiv -\sum \beta B(q-1, h', j', k').$$

Donc $B(q-1, h', j', k')$ doit faire partie à la fois de $a_{j'}^{h'}$, et de l'une des $B(q, h_1, j_1, k_1)$, et, par conséquent, de l'une des $a_{j_1}^{h_1}$, *différentes de* a_j^h. Si donc $a_{j'}^{h'}$ se confondait avec a_j^h,

$$B(q-1, h', j', k') = B(q-1, h, j, k)$$

devrait appartenir à une variété a_k^m, partie commune à a_j^h et $a_{j_1}^{h_1}$. De deux choses, l'une: ou bien a_j^h ne ferait pas partie de $a_{j_1}^{h_1}$, et alors on aurait encore $m < h$, ce qui serait encore contraire à la définition des classes; ou bien a_j^h ferait partie de $a_{j_1}^{h_1}$, et alors on aurait $h_1 > h$. Supposons que j'ai choisi la classe a_j^h, qui correspond au plus grand nombre h. Alors on ne pourra pas avoir $h_1 > h$, et $a_{j'}^{h'}$ devra appartenir à la frontière de a_j^h.

La congruence (2) entraine l'homologie

$$\sum \beta B(q-1, h', j', k') \sim 0; \tag{3}$$

comme, d'autre part, a_j^h *est simplement connexe* et que toutes les variétés $B(q-1, h', j', k')$ sont situées sur la frontière de a_j^h, le premier membre de (3), représentant une variété fermée à $q-1$ dimensions, située sur cette frontière, formera la frontière complète d'une variété à q dimensions

$$\sum \gamma B(q, h'', j'', k''),$$

également située sur la frontière de a_j^h. (Il y aurait exception si l'on avait $h = q$). De sorte qu'on aura la congruence

$$\sum \beta B(q-1, h', j', k') \equiv \sum \gamma B(q, h'', j'', k''). \tag{4}$$

D'ailleurs, comme $B(q, h'', j'', k'')$ est sur la frontière de a_j^h, il en sera de même de $a_{j''}^{h''}$; car si $B(q, h'', j'', k'')$ fait partie à la fois de $a_{j''}^{h''}$ et d'une variété $a_{j'}^{h'}$, faisant partie de la frontière de a_j^h; ou bien $a_{j''}^{h''}$ ne fait pas partie de $a_{j'}^{h'}$, et alors B devrait faire partie de a_k^m, où $m < h''$, et nous avons vu que cela était impossible.

On a donc

$$h'' < h.$$

Les congruences (2) et (4) donnent

$$S\alpha B(q, h, j, k) \equiv \sum \gamma B(q, h'', j'', k''),$$

et, comme toutes les variétés qui figurent dans cette congruence, font partie de a_j^h, ou de sa frontière, comme, d'autre part, a_j^h est simplement connexe, on aura l'homologie

$$S\alpha B(q, h, j, k) \sim \sum \gamma B(q, h'', j'', k'').$$

On peut, donc, remplacer, dans le premier membre de (1), l'ensemble des termes $S\alpha B(q, h, j, k)$ par l'ensemble des termes

$$\sum \gamma B(q, h'', j'', k'').$$

Si on opère de même pour toutes les classes correspondantes à une même valeur de h, la plus grande de toutes, on aura remplacé le premier membre de (1) par

$$\sum \alpha_2 B(q, h_2, j_2, k_2),$$

où la plus grande valeur de h_2 sera plus petite que la plus grande valeur de h. On aura, d'ailleurs, l'homologie

$$\sum \alpha B(q, h, j, k) \sim \sum \alpha_2 B(q, h_2, j_2, k_2).$$

En continuant de la sorte, on pourra diminuer encore la plus grande valeur de h. On ne sera arrêté que quand on aura partout $h = q$.

On peut donc, finalement, remplacer le premier membre de (1) par :

$$\sum \alpha_0 B(q, q, j_0, k_0),$$

et on aura d'ailleurs :

(5) $$\sum \alpha B(q, h, j, k) \sim \sum \alpha_0 B(q, q, j_0, k_0)$$

(6) $$\sum \alpha_0 B(q, q, j_0, k_0) \equiv 0.$$

Cela posé, dans le premier membre de (6) prenons les congruences qui appartiennent à une classe déterminée $a_{j_0}^h$; soit :

$$S\alpha_0 B(q, q, j_0, k_0).$$

Nous aurons :

(7) $$S\alpha_0 B(q, q, j_0, k_0) \equiv \sum \beta_0 B(q - 1, h'_0, j'_0, k'_0).$$

Nous verrions, comme plus haut, que $a_{j'_0}^{h'_0}$ doit faire partie de la frontière de $a_{j_0}^q$, d'où $h'_0 < q$ (et, comme $h'_0 \geqq q - 1$, on aura $h'_0 = q - 1$).

Soit alors :

(8) $$a_{j_0}^q = \sum B(q, q, j'_0, k_0)$$

l'équation $(1, q, j_0)$, qui définit la subdivision de la variété $a_{j_0}^q$, et soient $B(q, q, j_0, 1)$ et $B(q, q, j_0, 2)$ deux variétés, figurant dans le second membre de (8); je dis qu'elles devront figurer dans le premier membre de (6) avec le même coefficient α_0.

Supposons, d'abord, que ces deux variétés soient limitrophes; parmi les variétés à $q - 1$ dimensions qui leur serviront de frontière commune, il y en aura, au moins, une qui n'appartiendra pas à la frontière de $a_{j_0}^q$, qui fera, par conséquent, partie de la classe $a_{j_0}^q$.

Soit $B(q - 1, q, j_0, 1)$ cette variété : elle n'appartiendra pas à aucune autre des variétés $B(q, q, j_0, k)$.

Soit alors

$$B(q, q, j_0, 1) \equiv \varepsilon b_i^{q-1}$$

(9) $$B(q, q, j_0, 2) \equiv \varepsilon b_i^{q-1}$$

$$B(q, q, j_0, k) \equiv \varepsilon b_i^{q-1} \qquad (k > 2)$$

les congruences $(2, q, q, j_0, 1)$, $(2, q, q, j_0, 2)$, $(2, q, q, j_0, k)$, qui nous font connaitre les frontières des variétés $B(q, q, j_0)$. Voyons avec quel coefficient ε la variété $B(q-1, q, j_0, 1)$ figurera dans ces congruences.

D'après ce que nous venons de voir, ce sera avec le coefficient $+1$ dans la première, avec le coefficient -1 dans la seconde, avec le coefficient 0 dans les autres.

Soient donc α_1 et α_2 les valeurs des coefficients α_0, correspondantes aux deux variétés $B(q, q, j_0, 1)$ et $B(q, q, j_0, 2)$.

La combinaison des congruences (9) nous fournira une congruence

$$S\alpha_0 B(q, q, j_0, k_0) \equiv \varepsilon b_i^{q-1}, \tag{10}$$

qui devra être identique à (7), et le coefficient ε, avec lequel figurera $B(q-1, q, j_0, 1)$ dans le second membre de (10), sera évidemment $\alpha_1 - \alpha_2$. Mais $B(q-1, q, j_0, 1)$ ne peut pas figurer dans le second membre de (7), puisque nous avons vu que dans ce second membre on doit avoir $b'_0 = q-1$. Donc on doit avoir $\alpha_1 - \alpha_2 = 0$.

Ainsi les deux variétés $B(q, q, j_0, 1)$ et $B(q, q, j_0, 2)$ devront avoir même coefficient α_0, si elles sont limitrophes. Cela sera encore vrai, si elles ne le sont pas, parce que a_{j0}^q étant d'un seul tenant, on pourra passer d'une de ces variétés à l'autre par une suite d'autres variétés analogues, chacune d'elles étant limitrophe de celle qui la précède.

Donc le coefficient α_0 est le même pour toutes nos variétés. D'où:

$$S\alpha_0 B(q, q, j_0, k_0) = \alpha_0 \sum B(q, q, j_0, k_0) = \alpha_0 a_{j0}^q.$$

La congruence (6) et l'homologie (5) peuvent donc s'écrire:

$$\sum \alpha B(q, h, j, k) \sim \sum \alpha_0 a_{j0}^q \tag{5bis}$$

$$\sum \alpha_0 a_{j0}^q \equiv 0. \tag{6bis}$$

Si un nombre quelconque de congruences de la forme (1) sont distinctes, c'est-à-dire si aucune combinaison linéaire de leurs premiers

membres n'est pas homologue à o, je dis que les congruences (6^{bis}) seront également distinctes, et réciproquement.

En effet la comparaison des relations (1), (5^{bis}) et (6^{bis}) montre que si l'on a

$$\sum \alpha B(q, h, j, k) \sim 0,$$

on aura également

$$\sum \alpha_0 a^q_{j0} \sim 0,$$

et réciproquement.

Il résulte de là que si les a^q_i et les b^q_i sont simplement connexes, les nombres de Betti réduits sont les mêmes pour les deux polyèdres V et V'.

Soit maintenant W une variété quelconque, fermée, à q dimensions, située sur V. On peut toujours construire un polyèdre V', dérivé de V, au sens de la page 101 de l'*Analysis situs*, et tel que W soit une combinaison des b^q_i.

Nous devons donc conclure que: si les a^q_i sont simplement connexes, les nombres de Betti réduits, relatifs au polyèdre V, sont identiques aux nombres de Betti proprement dits, *définis de la seconde manière.*

§ VI.

Retour sur les démonstrations du § III.

Nous avons à revenir ici sur un point essentiel du raisonnement qui précède. J'ai dit plus haut qu'il n'y avait d'autre homologie que les homologies (9, q), obtenues au § 3. Cela n'est pas évident, cela ne serait pas même toujours vrai, si nous ne supposions pas les a^q_i simplement connexes.

Démontrons-le d'abord pour un polyèdre P, dans l'espace à 4 dimensions.

Considérons un certain nombre de variétés v_2 ou a^2_i, appartenant à ce polyèdre; je les appellerai ses faces, de même que les a^3_i, les a^1_i et les a^0_i de ce polyèdre P pourront s'appeler ses cases, ses arêtes et ses sommets.

Supposons que l'on ait entre ces faces a_i^2 une homologie

$$\sum a_i^2 \sim 0.$$

Cette homologie signifie qu'il existe une variété à 3 dimensions, V, faisant partie de P, et admettant $\sum a_i^2$ comme frontière complète.

Je dis que *V se compose d'un certain nombre de cases de P.*

Si, en effet, un point d'une case appartient à V, il en sera de même de tout autre point de cette case, car on peut aller du premier point au second, sans rencontrer aucune face et, par conséquent, sans rencontrer la frontière de V et sans sortir de V.

Le théorème est donc évident en ce qui concerne les polyèdres de l'espace à 4 dimensions et les homologies entre les faces.

Soit maintenant une homologie entre les arêtes :

$$\sum b_1 \sim 0,$$

les b_1 étant un cetain nombre d'arêtes a_i^1. Cela veut dire qu'il existe une variété à 2 dimensions, V, dont $\sum b_1$ est la frontière complète.

Je désignerai par $V(a_i^k)$ l'ensemble des points communs à V et à a_i^k.

Les $V(a_i^3)$ seront des variétés à 2 dimensions, dont la frontière sera formée soit par quelques-unes des arêtes b_1, soit par les $V(a_j^2)$, les a_j^2 étant les faces qui servent de frontière à la case a_i^3. On ne peut, en effet, sortir de $V(a_i^3)$ qu'en sortant de V par sa frontière, c'est-à-dire, en traversant une des b_1, ou qu'en sortant de a_i^3 par sa frontière, c'est-à-dire en traversant une face a_j^2, et, comme on reste sur V, en traversant une des lignes $V(a_j^2)$.

La variété totale V est formée de l'ensemble des $V(a_i^3)$.

Considérons maintenant $V(a_i^2)$; nous devons distinguer deux cas:

1° ou bien aucune des arêtes b_1 n'appartient à a_i^2. Nous ne pourrons alors sortir de $V(a_i^2)$ qu'en sortant de a_i^2, c'est-à-dire en traversant une des arêtes a_j^1; la frontière de $V(a_i^2)$ est donc formée par les $V(a_j^1)$.

2° ou bien une (ou plusieurs) arête b_1 fait partie de a_i^2; dans ce cas elle fera également partie de $V(a_i^2)$; mais il pourra se faire que $V(a_i^2)$ se compose, outre l'arête b_1, d'autres lignes; ces lignes auront pour frontières des points $V(a_j^1)$, ou des points situés sur b_1. Ces points situés sur b_1, et où les autres lignes, dont se compose $V(a_i^2)$, viennent se terminer sur l'arête b_1, seront ce que j'appellerai des *points nodaux*.

Dans tous les cas $V(a_i^2)$ sera une ligne ou un ensemble de lignes; si, en effet, $V(a_i^2)$ était une surface, c'est que a_i^2, ou une portion de cette face, ferait partie de V. Mais j'ai le droit de déformer V, pourvu que je ne change pas sa frontière $\sum b_1$; je puis toujours, par une déformation infiniment petite, éviter qu'une région de a_i^2 fasse partie de V.

Pour la même raison je puis toujours supposer que $V(a_i^1)$ se réduit à un ou plusieurs points, sauf si a_i^1 est l'une des arêtes b_1, auquel cas $V(a_i^1)$ sera cette arête elle-même.

Cela posé, je puis déformer V :

1° de manière que tous les $V(a_i^1)$ [autres que $V(b_1)$] soient des sommets. Soit a_j^0 un sommet de a_i^1. Soit M l'un des points dont se compose $V(a_i^1)$; autour du point M et sur V décrivons une petite courbe fermée C. Soit K l'aire infiniment petite découpée sur V par cette courbe C. Construisons une sorte de manchon, infiniment délié, entourant l'arête a_i^1 et passant par C. Par le sommet a_j^0 je mène une surface quelconque S; elle viendra découper sur le manchon une courbe fermée très petite C'. Soit K' la portion de la surface S limitée par C; soit H la surface du manchon comprise entre C et C'. On figurera ainsi une sorte de tambour, dont H sera la surface latérale, K et K' les deux bases.

Considérons alors la variété

$$V' = V - K + H + K'.$$

Cette variété aura même frontière que V; mais elle ne coupera plus a_i^1 en M, puisqu'on a supprimé la portion K de V, où se trouvait ce point M. En revanche, H ne coupera pas l'arête a_i^1, et K' coupera cette arête en a_j^0.

En opérant de même sur tous les points d'intersection de V et de a_i^1, on amènerait tous ces points à coïncider avec a_j^0.

2° de manière que tous les points nodaux soient des sommets.

Soit, en effet, a_i^2 une face passant par l'arête b_1; l'intersection de V et a_i^2 comprendra, outre b_1, d'autres lignes; soit c l'une de ces lignes, venant se terminer sur b_1 en un point nodal D. Soient a_j^0 et a_k^0 les deux sommets de b_1. Par b_1 je fais passer une surface S, faisant partie de P et ne coupant pas a_i^2. Comme a_j^0 et a_k^0 sont sur la frontière de V, je joins ces deux points par une ligne L, située sur V et s'écartant peu de b_1. Cette ligne s'écartant peu de b_1, je puis mener par L une autre surface S', qui ne passera pas par b_1, mais qui coupera S suivant une ligne L', très peu différente de b_1. Ces trois lignes L, b_1 et L' auront mêmes extrémités a_j^0 et a_k^0.

Soit V_1 la portion de V, comprise entre L et b_1; soit S_1 la portion de S, comprise entre L' et b_1, et S_1' la portion de S', comprise entre L et L'.

Je remplace V par

$$V' = V - V_1 + S_1 + S_1'.$$

V' a mêmes frontières que V, mais $V'(a_i^2)$ ne présente plus de points nodaux, en dehors de a_j^0 et a_k^0; car si une ligne analogue à c venait aboutir à un point nodal, situé entre a_j^0 et a_k^0, la portion de cette ligne c, voisine de ce point nodal, devrait se trouver sur S_1, ce qui est impossible, puisque S ne coupe pas a_i^2.

En résumé : nous pouvons toujours supposer que les $V(a_i^2)$ sont des lignes, dont les extrémités sont des sommets de a_i^2.

Soit alors L une des lignes, dont se compose $V(a_i^2)$, ayant pour extrémités deux sommets a_j^0 et a_k^0 de a_i^2. On peut aller de a_j^0 à a_k^0, en suivant le périmètre de a_i^2; soit $\sum a_m^1$ l'ensemble des arêtes de a_i^2, comprises entre a_j^0 et a_k^0. Comme la face a_i^2 est supposée simplement connexe, la ligne L la divisera en deux parties. Soit Q l'une de ces parties, comprise entre L et $\sum a_m^1$.

Soient a_p^3 et a_q^3 les deux cases séparées par a_i^2. Par les arêtes $\sum a_m^1$ je fais passer une surface S, peu différente de la face a_i^2 et située toute entière dans la case a_p^3; par les mêmes arêtes je fais passer une seconde

surface S', peu différente de a_i^2 et située dans la case a_q^3; ces deux surfaces S et S' couperont V, suivant deux lignes L_1 et L'_1, peu différentes de L, et ayant pour extrémités a_j^0 et a_k^0. Soit S_1 la portion de S comprise entre $\sum a_m^1$ et L_1; soit S_1 la portion de S' comprise entre $\sum a_m^1$ et L'_1; soit V_1 la portion de V comprise entre L_1 et L'_1; c'est sur V_1 que se trouvera L.

Soit maintenant

$$V' = V - V_1 + S_1 + S_1.$$

V' a mêmes frontières que V; V' ne passe plus par L, mais en revanche passe par les arêtes $\sum a_m^1$.

En opérant de la même manière pour toutes les lignes telles que L, on voit qu'on peut toujours supposer que tous les $V(a_i^2)$ se réduisent à des combinaisons d'arêtes.

Comme les frontières de $V(a_i^3)$ sont ou des b_1 ou des $V(a_j^2)$, on voit que les frontières des $V(a_i^3)$ sont des combinaisons d'arêtes de P, et, bien entendu, toutes ces arêtes doivent appartenir à a_i^3. Ainsi donc $V(a_i^3)$ est une surface simplement ou multiplement connexe, limitée par une ou plusieurs lignes fermées, qui, elles-mêmes, sont des combinaisons d'arêtes de a_i^3.

Comme la case a_i^3 est simplement connexe, ces lignes fermées subdiviseront la surface de cette case en un certain nombre de régions, et comme ces lignes fermées sont des combinaisons d'arêtes de a_i^3, ces régions seront des combinaisons des faces de a_i^3.

On pourra toujours trouver une combinaison de ces régions, qui aura mêmes frontières que $V(a_i^3)$. Supposons, par exemple, que la frontière de $V(a_i^3)$ se compose de trois lignes fermées L, L_1, L_2; la ligne L divisera la surface de a_i^3 en deux régions R et R'; les lignes L_1 et L_2 diviseront de même cette surface en deux régions R_1 et R'_1, ou R_2 et R'_2. Je suppose qu'en parcourant L dans un certain sens, on ait à sa gauche $V(a_i^3)$, et R et R' à sa droite; je suppose de même qu'en parcourant L_1 et L_2 dans un sens convenable, on ait à sa gauche $V(a_i^3)$ et R_1, ou $V(a_i^3)$ et R_2.

Alors la variété $R + R_1 + R_2$ aura même frontière que $V(a_i^3)$; on pourra donc remplacer $V(a_i^3)$ par $R + R_1 + R_2$.

En opérant de la même manière sur tous les $V(a_i^3)$, on aura remplacé V par une autre variété, qui aura même frontière $\sum b_1$, et qui sera une combinaison de faces de P.

Le théorème est donc démontré en ce qui concerne les polyèdres de l'espace à 4 dimensions et les homologies entre les arêtes.

On le démontrerait de même pour un polyèdre quelconque.

§ VII.

Polyèdre réciproque.

Soit P un polyèdre dans l'espace à 4 dimensions; ce polyèdre sera subdivisé en un certain nombre de variétés v_3, que j'appellerai ses *cases*, et que je désignerai par a_i^3. Ces cases seront separées les unes des autres par des variétés v_2 ou a_i^2, que j'appellerai les *faces*; ces faces auront pour frontières des variétés v_1, ou a_i^1, que j'appellerai les *arêtes*, et les extrémités des arêtes seront des points v_0 ou a_i^0, que j'appellerai les *sommets*.

Je supposerai, bien entendu, que les cases et les faces sont simplement connexes.

Marquons, à l'intérieur de chaque case a_i^3, un point $P(a_i^3)$; à l'intérieur de chaque face a_i^2, un point $P(a_i^2)$; sur chaque arête a_i^1, un point $P(a_i^1)$; chaque arête se trouvera ainsi partagée en deux parties par le point $P(a_i^1)$.

Joignons par des lignes le point $P(a_i^2)$ à chacun des sommets de la face a_i^2 et à chacun des points $P(a_j^1)$, correspondant aux diverses arêtes a_j^1 de la face a_i^2. Toutes ces lignes devront être tracées sur la face a_i^2. Cette face sera ainsi partagée en triangles, et le nombre de ces triangles sera double du nombre des arêtes de a_i^2. Nous ferons de même pour toutes les autres faces.

Considérons maintenant une case a_i^3; décomposons en triangles T toutes les faces a_j^2 de cette case, ainsi que nous venons de le dire. Construisons des triangles curvilignes, ayant pour sommet commun le point $P(a_i^3)$ et pour bases les différents côtés des différents triangles T. La case a_i^3 sera ainsi décomposée en tétraèdres, ayant $P(a_i^3)$ pour sommet commun et pour bases les différents triangles T.

Nous distinguerons six sortes de lignes (qui seront les arêtes de nos tétraèdres) :

celles de la 1ère sorte joindront un sommet a_i^0 à un point $P(a_j^1)$; chaque arête sera ainsi formée de deux lignes de la 1ère sorte;

celles de la 2de sorte joindront un point $P(a_i^3)$ à un point $P(a_j^2)$;

»	»	3e	»	»	»	$P(a_i^2)$	» sommet a_j^0;
»	»	4e	»	»	»	$P(a_i^1)$	» point $P(a_j^2)$;
»	»	5e	»	»	»	$P(a_i^3)$	» » $P(a_j^1)$;
»	»	6e	»	»	»	»	» sommet a_j^0.

Les lignes de la 2de sorte peuvent s'accoupler deux à deux de deux manières :

1° Ce que j'appellerai la ligne b_i^1 sera formée de deux lignes de la 2de sorte, joignant un même point $P(a_i^2)$ à deux points $P(a_j^3)$ et $P(a_k^3)$, correspondant aux deux cases a_j^3 et a_k^3 séparées par la face a_i^2. Il y aura donc autant de lignes b_i^1 que de faces a_i^2.

2° Ce que j'appellerai une ligne c sera formée de deux lignes de la 2de sorte, joignant un même point $P(a_i^3)$ à deux points $P(a_j^2)$ et $P(a_k^2)$, correspondant à deux faces a_j^2 et a_k^2 de la case a_i^3.

Il nous faut définir des surfaces que j'appellerai les surfaces b_i^2.

Soit une arête quelconque a_i^1 et le point $P(a_i^1)$. Supposons que les faces qui passent par a_i^1, soient successivement :

$$a_1^2,\ a_2^2,\ \ldots,\ a_q^2,$$

et que les cases, auxquelles appartient a_i^1, soient successivement :

$$a_1^3,\ a_2^3,\ \ldots,\ a_q^3,$$

de telle façon que a_1^2 sépare a_1^3 de a_2^3, a_2^2 sépare a_2^3 de $a_3^3, \ldots,$ et, qu'enfin, a_q^2 sépare a_q^3 de a_1^3. Convenons, pour plus de symétrie, de désigner indifféremment la case a_1^3 par a_1^3 ou a_{q+1}^3.

Décomposons chaque case en tétraèdres, et envisageons en particulier les tétraèdres qui admettent pour sommet le point $P(a_i^1)$. Considérons les $2q$ triangles curvilignes :

$$P(a_i^1)\,P(a_k^3)\,P(a_k^2),\quad P(a_i^1)\,P(a_{k+1}^3)\,P(a_k^2).\quad (k = 1, 2, \ldots, q)$$

L'ensemble de ces $2q$ triangles formera un certain polygone que j'appellerai b_i^2, et qui aura pour frontière l'ensemble des lignes

$$b_1^1,\ b_2^1,\ \ldots,\ b_q^1.$$

Définissons maintenant les volumes b_i^3; le volume b_i^3 sera l'ensemble des tétraèdres qui admettent pour sommet le point a_i^0; ce volume sera un polyèdre à 3 dimensions, simplement connexe, qui aura pour frontière l'ensemble des surfaces b_k^2, correspondant aux arêtes a_k^1, qui aboutissent au point a_i^0.

La juxtaposition des volumes b_i^3 constituera un nouveau polyèdre P', que j'appellerai le *polyèdre réciproque de P*, et qui aura pour cases le b_i^3, pour faces les b_i^2, pour arêtes les b_i^1, pour sommets les points $b_i^0 = P(a_i^3)$.

A chaque	case b_i^3	de P'	correspondra	un sommet	a_i^0	de P,
» »	face b_i^2	» »	»	une arête	a_i^1	» »
» »	arête b_i^1	» »	»	» face	a_i^2	» »
» »	sommet b_i^0	» »	»	» case	a_i^3	» ».

De plus, au sens du § II, il y aura la même relation, par exemple, entre l'arête b_i^1 et la face b_j^2, qu'entre la face a_i^2 et l'arête a_j^1.

Si donc les congruences caractéristiques du polyèdre P s'écrivent:

$$a_i^3 \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^3 a_i^2, \quad a_i^2 \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^2 a_i^1, \quad a_i^1 \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^1 a_j^0,$$

celles du polyèdre P' s'écriront:

$$b_i^3 \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^1 b_j^2, \quad b_i^2 \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^2 b_j^1, \quad b_i^1 \equiv \sum_j \varepsilon_{i,j}^3 b_j^0.$$

Considérons maintenant une ligne c, formée de deux lignes de la seconde sorte, joignant un même point $P(a_i^3)$ à deux points $P(a_j^2)$ et $P(a_k^2)$.

Soient a_m^0 et a_p^0 deux sommets, appartenant respectivement tous deux à la case a_i^3. Soient d et d' les deux lignes de la 3ème sorte qui joignent respectivement $P(a_j^2)$ à a_m^0, et $P(a_k^2)$ à a_p^0.

Comme a_m^0 et a_p^0 appartiennent à une même case a_i^3, on pourra aller de l'un de ces sommets à l'autre, en suivant une ligne brisée formée d'arêtes a_q^1 appartenant à a_i^3.

Soit $\sum a_q^1$ cette ligne brisée, dont les extrémités sont a_m^0 et a_p^0; l'ensemble des lignes $c - d - \sum a_q^1 + d'$ sera une ligne fermée, ce que j'exprimerai par la congruence :

$$c \equiv d + \sum a_q^1 - d'.$$

Comme a_i^3 est simplement connexe, cette ligne fermée sera la frontière d'une variété à 2 dimensions, intérieure à a_i^3, ce que j'exprimerai par l'homologie :

$$c \sim d + \sum a_q^1 - d'.$$

Réciproquement : soit $\sum a_q^1$ une ligne brisée, formée d'arêtes appartenant toutes à a_i^3, et dont les extrémités sont les sommets a_m^0 et a_p^0; ces deux sommets appartiendront respectivement à deux faces a_j^2 et a_k^2, faisant toutes deux partie de a_i^3. Soient les trois lignes :

$$c = P(a_j^2)P(a_i^3) + P(a_i^3)P(a_k^2), \quad d = P(a_j^2)a_m^0, \quad d' = P(a_k^2)a_p^0.$$

On aura encore

$$c \sim d + \sum a_q^1 - d'.$$

Soit maintenant a_i^0 un sommet appartenant à deux faces a_j^2 et a_k^2. Soient les deux lignes de la 3ème sorte :

$$d_j = P(a_j^2)a_i^0, \quad d_k = P(a_k^2)a_i^0.$$

Nous pouvons tracer une ligne L, s'écartant infiniment peu du sommet a_i^0, et allant d'un point de a_j^2 à un point de a_k^2.

Supposons, pour fixer les idées, que cette ligne traverse trois cases et qu'elle rencontre successivement la face a_j^2, la case a_j^3, la face a_m^2, la case a_m^3, la face a_p^2, la case a_p^3, et enfin la face a_k^2.

Construisons les trois lignes c :

$$c_j = P(a_j^2)P(a_j^3) + P(a_j^3)P(a_m^2),$$

$$c_m = P(a_m^2)P(a_m^3) + P(a_m^3)P(a_p^2),$$

$$c_p = P(a_p^2)P(a_p^3) + P(a_p^3)P(a_k^2),$$

et les deux lignes de la $3^{\text{ème}}$ sorte:

$$d_m = P(a^2_m)a^0_i, \quad d_p = P(a^2_p)a^0_i.$$

On aura:

$$c_j \equiv d_j - d_m, \quad c_m \equiv d_m - d_p, \quad c_p \equiv d_p - d_k;$$

et comme les trois cases a^3_j, a^3_m, a^3_p sont simplement connexes:

$$c_j \sim d_j - d_m, \quad c_m \sim d_m - d_p, \quad c_p \sim d_p - d_k,$$

et enfin:

$$c_j + c_m + c_p \sim d_j - d_k.$$

On peut donc toujours trouver une ligne brisée, formée de lignes c et homologue à $d_j - d_k$, d_j et d_k étant des lignes de la $3^{\text{ème}}$ sorte, aboutissant à un même sommet.

Cela posé, soit

$$\sum b^1_i \equiv 0 \tag{1}$$

une congruence entre les arêtes b^1_i du polyèdre P'.

La ligne brisée $\sum b^1_i$ est évidemment formée d'un nombre pair de lignes de la $2^{\text{ème}}$ sorte, et en parcourant cette ligne brisée, on rencontrera successivement q faces

$$a^2_1, a^2_2, \ldots, a^2_q,$$

pour revenir à la face a^2_1, que je désignerai également par a^2_{q+1}; et on rencontrera q cases

$$a^3_1, a^3_2, \ldots, a^3_p,$$

pour revenir à la case a^3_1, que je désignerai également par a^3_{q+1}, de sorte que la face a^2_k séparera la case a^3_k de la case a^3_{k+1}.

Notre congruence s'écrit alors:

$$\sum [P(a^3_k)P(a^2_k) + P(a^2_k)P(a^3_{k+1})] \equiv 0,$$

ou, ce qui revient au même,

$$\sum [P(a_{k-1}^2) P(a_k^3) + P(a_k^3) P(a_k^2)] = 0.$$

Soit alors a_k^0 un sommet de la face a_k^2, appartenant, par conséquent, à la fois aux cases a_k^3 et a_{k+1}^3.

Soit d_k la ligne de la 3ème sorte $P(a_k^2) a_k^0$; nous venons de voir qu'il existe une ligne brisée A_k, formée d'arêtes appartenant à la case a_k^3, et telle que l'on ait l'homologie:

$$P(a_{k-1}^2) P(a_k^3) + P(a_k^3) P(a_k^2) \sim d_{k-1} + A_k - d_k.$$

En additionnant toutes ces homologies, le premier membre se réduit à:

$$\sum [P(a_{k-1}^2) P(a_k^3) + P(a_k^3) P(a_k^2)] = \sum b_i^1;$$

les lignes de la 3ème sorte d_k disparaissent, et il reste:

$$\sum b_i^1 \sim \sum A_k,$$

et par conséquent

$$\sum b_i^1 \equiv \sum A_k \equiv 0.$$

Donc, à toute congruence $\sum b_i^1 \equiv 0$ entre les arêtes de P', correspond une congruence $\sum A_k \equiv 0$ entre les arêtes de P, et telle que l'on ait:

$$\sum b_i^1 \sim \sum A_k.$$

Si donc on a $\sum b_i^1 \sim 0$, on aura $\sum A_k \sim 0$, et réciproquement.

Soit maintenant

$$\sum A_k \equiv 0 \tag{2}$$

une congruence entre les arêtes de P; supposons que A_k soit une ligne brisée formée d'arêtes appartenant à la case a_k^3.

Le premier membre de la congruence (2) [illegible]

semblables lignes brisées :

$$A_1, A_2, \ldots, A_q,$$

et je désignerai indifféremment A_1 par A_1 ou A_{q+1}, et A_q par A_0 ou A_q.

Soient a_{k-1}^0 et a_k^0 les deux extrémités de la ligne A_k; le sommet a_k^0 appartiendra à la fois aux cases a_k^3 et a_{k+1}^3; soit $a_k'^2$ la face de a_k^3, et a_{k+1}^2 la face de a_{k+1}^3, auxquelles appartient a_k^0.

Soient les lignes de la $3^{\text{ème}}$ sorte

$$d_k' = P(a_k'^2)a_k^0, \quad d_{k+1} = P(a_{k+1}^2)a_k^0,$$

et d'autre parte :

$$c_k = P(a_k^2)P(a_k^3) + P(a_k^3)P(a_k'^2).$$

Nous avons vu que

$$A_k \backsim -d_k + c_k + d_k'.$$

D'autre part, les lignes d_{k+1} et d_k' aboutissent à un même sommet a_k^0; nous avons vu également que l'on peut trouver une combinaison C_k de lignes ς, telle que l'on ait

$$C_k \backsim d_k' - d_{k-1}.$$

En additionnant toutes ces homologies, je trouve :

$$\sum A_k \backsim \sum c_k + \sum C_k,$$

et par conséquent :

$$\sum c_k + \sum C_k \equiv 0.$$

Le premier membre de cette dernière congruence est une combinaison de lignes c, ou, ce qui revient au même, une combinaison d'arêtes b_i^1 du polyèdre P', de sorte que je puis poser :

$$\sum c_k + \sum C_k = \sum b_i^1,$$

d'où

$$\sum A_k \sim \sum b_i^1.$$

En résumé : à toute congruence entre les arêtes de P, correspond une congruence entre celles de P', et réciproquement, et la condition nécessaire et suffisante pour que le premier membre de l'une des congruences soit homologue à zéro, c'est que l'autre le soit.

En d'autres termes, le nombre des congruences distinctes entre les arêtes est le même pour P et P', en ne considérant pas des congruences comme distinctes, quand une combinaison linéaire des premiers membres de ces congruences est homologue à zéro.

En d'autres termes encore, le nombre de Betti réduit, relatif aux arêtes de P, est égal au nombre de Betti réduit, relatif aux arêtes de P'.

On pourrait arriver au même résultat, en remarquant que l'on peut construire un polyèdre qui serait, à la fois, dérivé du polyèdre P et dérivé du polyèdre réciproque P', et en appliquant le théorème du § 5.

Nous verrons plus loin, au § 10, que cette proposition peut être présentée sous une autre forme.

D'autre part, cela peut permettre, plus simplement qu'au § 5, de démontrer que les nombres de Betti réduits sont égaux aux nombres de Betti proprement dits.

En effet la définition du polyèdre P' comporte un certain arbitraire : ses sommets b_i^0 ne sont assujettis qu'à être intérieurs aux cases a_i^3 de P. Dans ces conditions, on peut évidemment choisir toujours le polyèdre P' de façon qu'une ligne fermée *quelconque* soit une combinaison des b_i^1.

§ VIII.

Démonstration du théorème fondamental.

Soit N_1 le nombre des arêtes de notre polyèdre P, N_2 le nombre des faces, N_3 celui des cases. Formons un tableau d'après les règles suivantes.

Le tableau aura $N_2 + N_3$ colonnes, N_2 dites de la $1^{\text{ère}}$ sorte et N_3 dites de la 2^{de}; il aura $N_2 + N_1$ lignes, N_2 de la $1^{\text{ère}}$ et N_1 de la 2^{de} sorte. Voici quels seront les éléments du tableau:

1° Pour l'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la $1^{\text{ère}}$ sorte et la $j^{\text{ème}}$ colonne de la $1^{\text{ère}}$ sorte, j'écrirai 1, si $i = j$, et 0, si $i \neq j$.

2° Les éléments appartenant à une ligne de la 2^{de} sorte et à une colonne de la 2^{de} sorte, seront tous nuls.

3° L'élément de la $i^{\text{ème}}$ colonne de la $1^{\text{ère}}$ sorte et de la $j^{\text{ème}}$ ligne de la 2^{de} sorte, sera $\varepsilon^2_{i,j}$, $\varepsilon^2_{i,j}$ étant le nombre qui nous fait connaître la relation entre la face a^2_i et l'arête a^1_j.

4° L'élément de la $i^{\text{ème}}$ ligne de la $1^{\text{ère}}$ sorte et de la $j^{\text{ème}}$ colonne de la 2^{de} sorte, sera $\varepsilon^3_{i,j}$, c'est-à-dire le nombre qui fait connaître la relation entre la case a^3_j et la face a^2_i.

Notre tableau, s'il y a par exemple deux cases, quatre faces et trois arêtes, présentera un aspect tel que celui-ci:

$$
\begin{matrix}
1 & 0 & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 1 & 0 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 1 & 0 & \varepsilon & \varepsilon \\
0 & 0 & 0 & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0 \\
\varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 0 & 0
\end{matrix}
\tag{1}
$$

Je n'ai pas écrit les indices des nombres ε pour simplifier.

Voici maintenant les opérations que je regarde comme permises sur ce tableau.

1° Ajouter une colonne à une autre *de même sorte*, ou l'en retrancher.

2° Ajouter une ligne à une autre *de même sorte*, ou l'en retrancher.

3° Permuter deux colonnes de même sorte, en changeant tous les signes de l'une d'elles.

4° Permuter deux lignes de même sorte, en changeant tous les signes de l'une d'elles.

Toutes ces transformations, pour lesquelles les éléments du tableau restent entiers, s'appelleront les *transformations arithmétiques* du tableau.

On peut s'en servir pour simplifier la partie du tableau qui appartient aux colonnes de la 1ère sorte et aux lignes de la 2de sorte, et celle qui appartient aux colonnes de la 2ème sorte et aux lignes de la 1ère sorte.

Voici jusqu'où l'on peut pousser la simplification, d'après des théorèmes bien connus d'arithmétique; quand la réduction sera terminée:

L'élément de la $i^{ème}$ colonne de la 1ère sorte et de la $j^{ème}$ ligne de la 2de sorte:

1° Sera nul, si $i > j$.

2° Sera égal à un entier H_i, qui pourra être nul, si $i = j$.

3° Sera encore nul, si $i < j$ et si H_i est premier avec H_j.

4° Enfin sera nul, si $j > N_2$.

Il en sera de même de l'élément de la $i^{ème}$ ligne de la 1ère sorte et de la $j^{ème}$ colonne de la 2de sorte.

La réduction peut être poussée encore plus loin, si l'on autorise une cinquième opération: multiplier tous les éléments d'une ligne ou d'une colonne par un même nombre entier ou non, différent de zéro.

Les transformations correspondantes s'appelleront les *transformations algébriques* du tableau.

On peut alors supposer que l'élément de la $i^{ème}$ colonne de la 1ère sorte et de la $j^{ème}$ ligne de la 2de sorte (de même que l'élément de la $i^{ème}$ ligne dela 1ère sorte et de la $j^{ème}$ colonne de la 2de sorte) est nul, si $i \neq j$. Si $i = j$, il peut être égal à 0 ou à 1. S'il en est ainsi, je dirai que le tableau est *réduit*.

Après la cinquième opération, les éléments qui appartiennent aux lignes et aux colonnes de la 1ère sorte pourront ne pas rester entiers; de plus, le déterminant formé par ces lignes et ces colonnes pourra ne pas rester égal à 1, mais il restera différent de zéro.

Le tableau (1) est relatif aux faces du polyèdre P et à leurs relations avec les cases et les arêtes. Nous pourrions en dresser un, tout pareil, relatif aux arêtes du polyèdre P et à leurs relations avec les faces et les sommets.

Nous pourrions également envisager le polyèdre P', défini plus haut, et construire deux tableaux relatifs l'un aux faces de P', l'autre à ses arêtes.

Comparons le tableau (1), relatif aux faces de P, avec le tableau (1^{bis}) relatif aux arêtes de P'.

Il résulte de ce qui précède, que ces deux tableaux peuvent se déduire l'un de l'autre en remplaçant les lignes par les colonnes et inversement.

Cela posé, envisageons le tableau (1), relatif aux faces de P, et examinons comment on peut déduire de ce tableau le nombre de Betti P_2 du polyèdre P.

Comment, d'abord, pourra-t-on en déduire les congruences entre les faces et les arêtes?

Considérons une colonne quelconque de la 1ère sorte; par exemple la $i^{\text{ème}}$ colonne. Multiplions les éléments de cette colonne et de la $k^{\text{ème}}$ ligne de la 1ère sorte par a_k^2 et ajoutons; puis égalons à la somme obtenue, en multipliant les élements de cette même colonne et de la $j^{\text{ème}}$ ligne de la 2de sorte par a_j^1; nous obtiendrons la congruence

$$a_i^2 \equiv \sum \varepsilon_{i,j}^2 a_j^1,$$

ce qui est bien une des congruences (3) du § II. Toutes les autres congruences n'en sont que des combinaisons.

Comment pourra-t-on maintenant trouver les homologies entre les faces?

Pour cela, envisageons par exemple la $i^{\text{ème}}$ colonne de la 2de sorte; multiplions les éléments de la $k^{\text{ème}}$ ligne et de cette colonne par a_k^2, ajoutons et égalons à zéro; nous trouverons:

$$\sum \varepsilon_{i,k}^3 a_k^2 \sim 0,$$

ce qui est bien une des homologies (5) du § II, dont toutes les autres ne sont que des combinaisons.

Qu'adviendra-t-il, maintenant, si l'on applique à notre tableau (1) *une transformation algébrique quelconque?*

Avant la transformation, chaque colonne de la 1ère sorte correspond

à une face, chaque colonne de la 2^{de} sorte à une case, chaque ligne de la $1^{\text{ère}}$ sorte à une face, chaque ligne de la 2^{de} sorte à une arête.

On obtient, comme nous l'avons vu, autant de congruences et d'homologies que de colonnes, en multipliant les éléments de chaque ligne de la $1^{\text{ère}}$ sorte par la face correspondante, ceux de chaque ligne de la 2^{de} sorte par l'arête correspondante, et ajoutant.

Supposons maintenant qu'on fasse la deuxième opération, c'est-à-dire qu'on transforme en ajoutant la ligne de la $1^{\text{ère}}$ sorte, qui correspond à a_i^2, à celle de la $1^{\text{ère}}$ sorte, qui correspond à a_k^2. Nous convenons de dire qu'à la nouvelle $k^{\text{ème}}$ ligne (celle à laquelle on a ajouté la $i^{\text{ème}}$ ligne) correspond toujours la variété a_k^2; mais qu'à la nouvelle $i^{\text{ème}}$ ligne (qui d'ailleurs n'a pas changé) correspond la variété $a_i^2 - a_k^2$.

Si l'on fait la cinquième opération sur la $k^{\text{ème}}$ ligne de la $1^{\text{ère}}$ sorte, en en multipliant les éléments par une constante m, nous conviendrons de dire qu'à la nouvelle $k^{\text{ème}}$ ligne correspond la variété $\frac{1}{m}a_k^2$ (notation qui n'a qu'une valeur symbolique, à moins que $\frac{1}{m}$ ne soit entier).

Quant à la quatrième opération, ce n'est qu'une combinaison de plusieurs opérations analogues à la deuxième.

Nous avons ainsi défini la variété qui correspond à chacune des lignes de la $1^{\text{ère}}$ sorte du tableau, après qu'on a appliqué à ces lignes une combinaison quelconque des $2^{\text{ème}}$, $4^{\text{ème}}$ et $5^{\text{ème}}$ opérations.

Nous définirions de même les variétés qui correspondent aux différentes lignes de la 2^{de} sorte, après qu'on aurait appliqué à ces lignes une combinaison des $2^{\text{ème}}$, $4^{\text{ème}}$ et $5^{\text{ème}}$ opérations.

Grâce à ces conventions, il suffira encore, pour obtenir les congruences et les homologies, d'ajouter et d'égaler à zéro, après avoir multiplié les éléments de chaque ligne par la variété correspondante, et avoir changé le signe des produits ainsi obtenus, en ce qui concerne les lignes de la 2^{de} sorte.

Maintenant, si l'on applique aux colonnes du tableau les $1^{\text{ème}}$, $3^{\text{ème}}$ et $5^{\text{ème}}$ opérations, on ne fera que combiner les congruences entre elles, et les homologies entre elles; ou multiplier une congruence et une homologie par un facteur constant.

D'où le résultat suivant :

Pour déduire les congruences du tableau transformé, voici ce qu'il faut faire : multiplier chaque ligne de la 1ère sorte pour la variété qui lui correspond en vertu de la convention que nous venons de faire, et ajouter; faire de même pour les lignes de la 2de sorte; égaler les deux résultats ainsi obtenus; on aura ainsi autant de congruences que de colonnes de la 1ère sorte; toutes les autres congruences possibles ne seront que des combinaisons.

Pour déduire de même les homologies, il faut : multiplier chaque ligne de la 1ère sorte pour la variété correspondante, ajouter et égaler à zéro; on aura ainsi autant d'homologies que de colonnes de la 2de sorte; toutes les autres homologies possibles n'en seront que des combinaisons.

Il importe de remarquer que les congruences et homologies ainsi obtenues, pourront n'avoir qu'une valeur symbolique, parce que les coefficients pourront être fractionnaires.

Et, en effet, d'une part les éléments du tableau transformé peuvent ne plus être entiers; d'autre part, la variété qui correspond à une ligne peut, comme je l'ai dit plus haut, n'avoir elle-même qu'une valeur symbolique.

Mais comme les coefficients, entiers ou non, sont toujours commensurables, il suffira de multiplier notre congruence ou notre homologie par un entier convenable, pour en déduire une congruence ou une homologie à coefficients entiers, qui aura un sens pour elle-même.

Supposons, maintenant, qu'on ait réduit le tableau, comme je l'ai dit plus haut.

Combien y aura-t-il d'homologies distinctes ?

Parmi nos N_3 colonnes de la 2de sorte, il y en aura $N_3 - N_2$ dont tous les éléments seront nuls, et N_2 dont un élément sera égal à 1 et tous les autres nuls. Les $N_3 - N_2$ premières ne nous donneront aucune homologie; chacune des N_2 autres nous en donnera une et ces N_2 homologies seront évidemment toutes distinctes.

Il y a donc N_2 homologies distinctes.

Combien y a-t-il de congruences distinctes entre les faces et les arêtes ?

Il y en a évidemment N_2, correspondant aux N_2 colonnes de la

1ère sorte, et ces congruences sont distinctes, parce que le déterminant formé avec les lignes et les colonnes de la 1ère sorte, n'est pas nul.

Considérons maintenant dans notre tableau réduit les N_1 lignes de la 2de sorte; parmi elles il y en aura $N_1 - N_2''$ dont tous les éléments sont nuls, et N_2'', dont un élément est égal à 1 et tous les autres nuls. Parmi nos N_2 congruences il y en aura donc N_2'' qui contiendront une arête, et $N_2 - N_2'$ qui ne contiendront aucune arête. Il y a donc $N_2 - N_2''$ congruences *entre les faces seulement*, et ces congruences sont toutes distinctes.

Il y aura donc *entre les faces seulement* $N_2 - N_2' - N_2''$ congruences, qui resteront distinctes, si l'on ne regarde plus comme distinctes celles que l'on peut déduire les unes des autres par le moyen des homologies.

Le nombre de B e t t i *relatif aux faces de* P *est donc :*

$$N_2 - N_2' - N_2'' + 1.$$

Cherchons maintenant le nombre de B e t t i relatif aux arêtes de P.

On le trouvera évidemment en opérant comme nous venons de faire sur le tableau (1^{bis}), relatif aux arêtes de P'.

Mais on passe d'un tableau à l'autre, en remplaçant les lignes par les colonnes, et réciproquement. Les nombres qui joueront, par rapport à (1^{bis}), le même rôle que

$$N_2,\ N_2',\ N_2''$$

jouent par rapport à (1), seront donc respectivement :

$$N_2,\ N_2'',\ N_2'.$$

Donc le nombre de B e t t i relatif aux arêtes de P' est encore :

$$N_2 - N_2' - N_2'' + 1.$$

Ainsi les nombres de B e t t i relatifs, l'un aux faces de P, l'autre aux arêtes de P', sont égaux.

Or nous avons vu plus haut que les nombres de Betti relatifs aux arêtes de P et à celles de P' sont égaux, de même que les nombres de Betti relatifs aux faces de P et à celles de P'.

Donc le nombre de Betti relatif aux faces de P est égal au nombre de Betti relatif aux arêtes de P.

Notre théorème fondamental est donc démontré en ce qui concerne le polyèdre P, c'est-à-dire, en ce qui concerne les polyèdres de l'espace à quatre dimensions.

La démonstration pourrait, sans aucun doute, s'étendre à un polyèdre quelconque.

§ IX.

Remarques diverses.

Le théorème fondamental est ainsi établi par une démonstration, qui diffère essentiellement de celle de la page 43 de l'*Analysis situs.*

Mais cela ne saurait pas nous suffire. Il faut nous efforcer de retrouver les propositions intermédiaires, et, en particulier, celle-ci :

La condition nécessaire et suffisante pour que l'on puisse trouver une variété V telle que $\sum N(V, V_i) \neq 0$, c'est que l'on n'ait pas l'homologie $\sum V_i \sim 0$.

Considérons deux variétés, la première V_1, à une dimension, composée d'arêtes de P', la seconde V_2, à deux dimensions, composée de faces de P, de telle sorte qu'on aura :

$$V_1 = \sum \alpha_i b_i^1, \quad V_2 = \sum \alpha'_i a_i^2,$$

l'arête b_i^1 étant celle qui correspond à la face a_i^2, d'après les conventions du § 7.

L'arête b_i^1 coupe la face a_i^2, et n'en coupe aucune autre, de telle sorte que si nous reprenons la notation de l'*Analysis situs,* pag. 38, nous aurons :

$$N(V_1, V_2) = \sum \alpha_i \alpha'_i.$$

Nous supposerons dans ce qui va suivre, que les variétés V_1 et

V_2 sont fermées, ce qui s'exprime par les congruences :

$$(1) \qquad \sum \alpha_i b_i^1 \equiv 0, \quad \sum \alpha_i' a_i^2 \equiv 0.$$

Vérifions d'abord que l'on aura

$$\sum \alpha_i \alpha_i' = 0,$$

pourvu que l'on ait l'une des deux homologies (*) :

$$(2) \qquad \sum \alpha_i b_i^1 \sim 0, \quad \sum \alpha_i' a_i^2 \sim 0.$$

Si en effet nous avons, par exemple, la seconde homologie (2), c'est qu'on aura :

$$\alpha_i' = \sum_{j=1}^{j=N_3} \zeta_j \varepsilon_{i,j}^3,$$

ζ_j étant un coefficient ne dépendant que de j.

D'un autre côté, la première des congruences (1) peut se déduire de l'une des suivantes :

$$(3) \qquad b_i^1 \equiv \sum b_j^0 \varepsilon_{j,i}^3,$$

d'où

$$\sum \alpha_i b_i^1 \equiv \sum \sum \alpha_i b_j^0 \varepsilon_{j,i}^3.$$

En égalant à zéro le coefficient de b_j^0, il vient successivement :

$$\sum \alpha_i \varepsilon_{j,i}^3 = 0, \quad \sum \sum \alpha_i \zeta_j \varepsilon_{j,i}^3 = 0, \quad \sum \alpha_i \alpha_i' = 0, \quad \text{C. Q. F. D.}$$

On raisonnerait de même si on avait la première homologie (2).

Je dis maintenant que si la seconde homologie (2) n'a pas lieu, on peut choisir les α_i de telle façon que V_1 reste fermée et cependant que $\sum \alpha_i \alpha_i'$ ne soit pas nul.

En effet, dire que la seconde homologie (2) n'a pas lieu, c'est

(*) Cfr. *Analysis situs*, pag. 42.

dire qu'on ne peut pas trouver des nombres ζ_j tels que l'on ait :

$$(4) \qquad \alpha'_i = \sum \zeta_j \varepsilon^3_{j,i}.$$

Dire que V_1 reste fermée, c'est dire que les α_i sont assujettis aux conditions :

$$(5) \qquad \sum \alpha_i \varepsilon^3_{j,i} = 0.$$

Or il est clair que si les α'_i ne satisfont pas à des égalités de la forme (4), l'équation linéaire $\sum \alpha_i \alpha'_i = 0$ sera distincte des équations (5); on pourra donc toujours trouver des nombres α_i, qui satisfassent aux équations (5) sans satisfaire à $\sum \alpha_i \alpha'_i = 0$.

Remarquons d'ailleurs que nous n'avons pas restreint la généralité en supposant que nos variétés V_1 et V_2 étaient des combinaisons des b^1_i et des a^2_i, quelle que soit la variété V, dont la subdivision forme les polyèdres P et P'. Quelles que soient les variétés V_1 et V_2, nous pouvons toujours subdiviser V, de manière à former deux polyèdres réciproques P et P' tels que V_1 soit une combinaison des arêtes du second, et V_2 une combinaison des faces du premier.

Il faudrait voir comment le tableau (1) du § 8 et les tableaux analogues, peuvent nous permettre de déterminer les nombres de Betti, tels que Betti les définit lui-même, et non plus les nombres de Betti définis de la seconde manière, c'est-à-dire ceux que nous avons considérés jusqu'à présent.

Considérons, par exemple, un tableau analogue au tableau (1), mais relatif aux arêtes du polyèdre P et à leurs relations avec les faces et les sommets. Considérons, en particulier, les colonnes de la 2[de] sorte et les signes de la 1[ère] sorte, où figurent les nombres $\varepsilon^2_{i,j}$. Soit T le tableau partiel ainsi obtenu. A l'aide de ce tableau on pourra former les congruences

$$a^2_i \equiv \sum \varepsilon^2_{i,j} a^1_j,$$

d'où l'on déduit les homologies

$$(6) \qquad \sum \varepsilon^2_{i,j} a^1_j \sim 0.$$

Alors pour reconnaître si plusieurs lignes fermées, formées de

combinaisons des arêtes a_j^1 sont distinctes *au sens de la* 1ère *définition,* c'est-à-dire, *au sens de Betti,* il faut savoir si elles sont liées par une homologie obtenue en combinant les homologies (6) par addition, soustraction ou multiplication, mais *sans division.*

Supposons qu'on ait appliqué à notre tableau une série de ces transformations, que j'ai appelées arithmétiques au § 8.

Soit $\zeta_{i,j}^2$ le nombre qui, dans le tableau transformé, figure dans la $j^{\text{ème}}$ ligne de la 1ère sorte et la $i^{\text{ème}}$ colonne de la 2de sorte. Soit c_j la variété qui correspond à la $j^{\text{ème}}$ ligne de la 1ère sorte de notre tableau transformé en vertu des conventions du § 8. D'après ce que nous avons vu dans ce § 8, cette variété n'est qu'une combinaison des arêtes a_j^1. Nous aurons alors les homologies

$$(6^{\text{bis}}) \qquad \sum \zeta_{i,j}^2 c_j \sim 0.$$

Ces homologies ne sont que des combinaisons des homologies (6), que l'on peut obtenir *sans division,* et réciproquement on peut tirer des homologies (6) des homologies (6^{bis}) *sans division,* c'est là une conséquence du caractère arithmétique des transformations.

On peut donc, quand on veut s'assurer si deux lignes fermées sont distinctes au sens de Betti, se servir des homologies (6^{bis}) au lieu des homologies (6).

Nous pouvons supposer qu'on s'est servi des transformations arithmétiques pour réduire le tableau, comme je l'ai expliqué au § 8, et par conséquent que $\xi_{i,j}^2$ est nul : 1° si $i > j$; 2° si $j > N_2$.

Le tableau réduit aux colonnes de la 2de sorte et aux lignes de la 1ère sorte prendra, par exemple, la forme suivante :

$$\begin{array}{ccccc} a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ e & b & 0 & 0 & 0 \\ f & g & c & 0 & 0 \\ h & k & l & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0. \end{array}$$

J'ai supposé [illegible] lignes et [illegible] colonnes. J'ai supposé que l'un des nombres [illegible] est égal à zéro, de façon qu'une des colonnes du tableau transformé soit entièrement composée de zéros. J'ajoute que si d était égal à [illegible], les nombres [illegible] qui figurent à la même ligne, seraient nuls.

Cela posé, si [illegible] n'est pas égal à [illegible], les deux définitions des nombres de Betti ne coïncident pas, parce que l'on a l'homologie $dc_4 \sim 0$, d'où l'on ne pourrait déduire l'homologie [illegible] ~ 0 que par division. Si [illegible] $=$ [illegible] $=$ [illegible] $=$ [illegible] et si [illegible] n'est pas égal à 1, on aura l'homologie [illegible] $\sim$ [illegible], et les deux définitions ne concorderont pas; et ainsi de suite.

En résumé, pour que les deux définitions concordent, il faut et il suffit que le produit [illegible] soit égal à [illegible].

Pour interpréter ce résultat, revenons au tableau non transformé. Le produit [illegible] sera le plus grand commun diviseur de tous les déterminants obtenus en supprimant $N_2 - N_3$ lignes dans le tableau T, pourvu que ces déterminants ne soient pas tous nuls (auquel cas il n'y aurait pas dans le tableau transformé de colonne exclusivement composée de zéros). Si les déterminants sont tous nuls, on en formera d'autres en supprimant dans le tableau T une colonne et $N_2 - N_3 + 1$ lignes; le produit [illegible] sera le plus grand commun diviseur de tous ces déterminants, s'ils ne sont pas tous nuls; et ainsi de suite.

Nous arrivons ainsi à la règle suivante.

Soit Δ_p le plus grand commun diviseur des déterminants obtenus en partant du tableau T et en supprimant p lignes et $N_2 - N_3 + p$ colonnes. La condition nécessaire et suffisante pour que les deux définitions des nombres de Betti coïncident, c'est que le premier des Δ_p qui ne s'annule pas soit égal à 1 (le plus grand commun diviseur de plusieurs nombres égaux à zéro étant zéro par définition).

Supposons que la variété $V_2 = \sum$ [illegible] considérée au début de ce paragraphe ne peut pas être frontière d'une variété à deux dimensions, mais satisfait à l'homologie [illegible] $\sim$ [illegible]. En d'autres termes, l'homologie [illegible] $\sim$ [illegible] peut se déduire des homologies [illegible] par division, mais non pas [illegible]

$$[illegible] = \sum [illegible] = [illegible]$$

§ X.

Démonstration arithmétique de l'un des théorèmes du § VII.

Voici une manière de former les homologies qui pourra être utile à connaître.

Soit b_i^0 un sommet du polyèdre P', situé à l'intérieur d'une case a_i^3 du polyèdre P. Soit, d'autre part, a_k^0 un sommet de P, appartenant à la case a_i^3. Joignons b_i^0 à a_k^0 par une ligne que j'appellerai simplement $b_i^0 a_k^0$.

Soit maintenant b_i^1 une arête de P', dont les deux extrémités sont b_j^0 et b_h^0, de telle sorte que l'une des congruences (3) (cfr. § 2) relatives à P' soit :

$$b_i^1 \equiv b_j^0 - b_h^0.$$

Soit, d'autre part, a_i^2 la face de P qui correspond à l'arête b_i^1 de P', et a_k^0 un des sommets de a_i^2; nous aurons l'homologie :

$$b_i^1 \sim a_k^0 b_j^0 - a_k^0 b_h^0. \tag{1}$$

Soit a_i^1 une arête de P, dont les deux extrémités sont a_j^0 et a_h^0, de sorte que l'une des congruences (3) relatives à P soit :

$$a_i^1 \equiv a_j^0 - a_h^0.$$

Soit a_k^3 l'une des cases de P auxquelles appartient a_i^1, et b_k^0 le sommet correspondant de P'; on aura l'homologie :

$$a_i^1 \sim b_k^0 a_j^0 - b_k^0 a_h^0. \tag{2}$$

Je dis maintenant que toutes les homologies entre les a_i^1 peuvent se déduire des homologies (2).

En effet, soit a_i^2 une face quelconque de P, et soit :

$$a_i^2 \equiv \sum \varepsilon_{i,j}^2 a_j^1$$

la congruence de la forme (3) qui lui correspond; on en déduit l'homologie :

$$(3) \qquad \sum \varepsilon^2_{i,j} a^1_j \sim 0,$$

et nous avons vu au § 6 que toutes les homologies entre les arêtes de P sont des combinaisons de celles qu'on obtient de la sorte.

Soit alors a^1_j l'une des arêtes de P qui figurent dans l'homologie (3), et soit :

$$a^1_i \equiv a^0_h - a^0_l.$$

Soit d'ailleurs a^3_k l'une des cases dont fait partie a^2_i. Nous aurons l'homologie :

$$(2^{\text{bis}}) \qquad a^1_j \sim b^0_k a^0_h - b^0_k a^0_l.$$

Si nous additionnons les homologies (2^{bis}) qui sont de la forme (2), après les avoir multipliées par $\varepsilon^2_{i,j}$, tous les termes du second membre disparaîtront en vertu des relations (5) du § 2; on retrouverait donc l'homologie (3). C. Q. F. D.

On démontrerait de même que toutes les homologies entre les b^1_i peuvent se déduire des homologies (1).

Nous avons vu plus haut, au § 7, que si l'on a une congruence :

$$\sum a^1_i \equiv 0,$$

on peut trouver une autre congruence entre les arêtes de P' :

$$\sum b^1_j \equiv 0,$$

et de telle façon qu'on ait l'homologie :

$$(4) \qquad \sum a^1_i \sim \sum b^1_j.$$

Je dis maintenant que cette homologie (4) peut être déduite des homologies (1) et (2).

Découpons, en effet, le premier membre de notre congruence $\sum a^1_i \equiv 0$ en un certain nombre de groupes, de telle façon que les

arêtes d'un même groupe appartiennent à une même case a_k^2. Soit $\sum a_j^1$ l'un de ces groupes; nous aurons la congruence :

$$(5)\qquad \sum a_j^1 \equiv a_m^0 - a_p^0,$$

a_m^0 et a_p^0 étant les deux extrémités de la ligne formée par l'ensemble des arêtes de ce groupe. Je suppose que toutes ces arêtes appartiennent à la case a_k^2. Soit

$$a_j^1 \equiv a_h^0 - a_l^0$$

l'une de ces arêtes; nous aurons l'homologie :

$$(2^{\text{ter}})\qquad a_j^1 \equiv b_k^0 a_h^0 - b_k^0 a_l^0,$$

et en ajoutant toutes ces homologies, on trouverait :

$$(6)\qquad \sum a_j^1 \sim b_k^0 a_m^0 - b_k^0 a_p^0.$$

Ajoutons d'une part toutes les homologies (6), d'autre part toutes les congruences (5), qui correspondent aux différents groupes. L'addition des congruences (5) doit nous donner la congruence $\sum a_i^1 \equiv 0$; il s'en suit que si un sommet a_m^0 figure dans une des congruences (5) avec le signe $+$, il devra figurer dans une autre avec le signe $-$. L'addition des homologies (6) nous donnera donc :

$$(7)\qquad \sum a_j^1 \sim \sum (b_k^0 a_m^0 - b_q^0 a_m^0).$$

En écrivant cette relation je suppose que a_m^0 figure dans deux des congruences (5), une fois avec le signe $+$ dans la congruence qui correspond à la case a_k^2, et une fois avec le signe $-$ dans la congruence qui correspond à la case a_q^2.

Observons maintenant que b_k^0 et b_q^0 sont deux sommets de P', et que ces deux sommets appartiennent l'un et l'autre à la case b_m^2. On peut alors trouver une ligne formée d'arêtes de P', appartenant à cette case b_m^2, et allant de b_k^0 à b_q^0. Soit $\sum b_i^1$ cette ligne; on aura

$$(5^{\text{bis}})\qquad \sum b_i^1 \equiv b_k^0 - b_q^0.$$

De même que de la congruence (5) des homologies (2^{ter}), qui sont de la forme (2), nous avons déduit l'homologie (6); de même de la congruence (5^{bis}) et d'homologies de la forme (1), nous pourrons déduire l'homologie :

$$(6^{bis}) \qquad \sum b_s^1 \sim a_m^0 b_k^0 - a_m^0 b_q^0.$$

A chaque terme du second membre de (7) correspond une homologie (6^{bis}). En les additionnant, on trouvera :

$$(7^{bis}) \qquad \sum \sum b_s^1 \sim \sum (a_m^0 b_k^0 - a_m^0 b_q^0),$$

d'où :

$$(8) \qquad \sum a_j^1 + \sum \sum b_s^1 \sim 0,$$

homologie de la forme (4), qui se déduit, comme on le voit, des homologies (1) et (2). C. Q. F. D.

On peut se demander pourquoi j'ai jugé nécessaire de revenir sur un théorème déjà démontré au § 7. On le comprendra si on se rend compte de la nature géométrique, pour ainsi dire, de la démonstration du § 7. La présente démonstration a, au contraire, un caractère arithmétique; elle n'invoque que des propriétés des schémas définis au § 2, et des tableaux construits au § 8; et elle conserverait sa valeur alors même qu'à ces schémas et à ces tableaux ne correspondrait aucun polyèdre.

Qu'avons-nous supposé en effet ? C'est que si α_0^p, α_1^p, α_2^p sont les nombres des sommets, des arêtes et des faces appartenant à une même case, et si β_0^p, β_1^p, β_2^p sont les nombres des cases, des faces et des arêtes auxquelles appartient un même sommet, on a :

$$\alpha_0^p - \alpha_1^p + \alpha_2^p = \beta_0^p - \beta_1^p - \beta_2^p = 2;$$

et en outre que deux sommets quelconques a_i^0 et a_k^0 sont liés par l'homologie :

$$(9) \qquad a_i^0 \sim a_k^0.$$

Or on peut reconnaître si un sommet appartient à une face, par

exemple, en appliquant au tableau du § 8 des règles purement arithmétiques, et on peut de la même manière reconnaître si une homologie telle que (9) a lieu.

§ XI.

Possibilité de la subdivision.

Tout ce qui précède suppose qu'une variété quelconque peut être subdivisée en variétés simplement connexes, de manière à former un polyèdre P, à p dimensions, pour lequel les variétés a_i^p, a_i^{p-1}, ..., a_i^2, a_i^1, a_i^0 sont toutes simplement connexes. Par exemple, toute variété à trois dimensions pourra être subdivisée en cases simplement connexes, séparées les unes des autres par des faces simplement connexes.

C'est cela qu'il nous reste à démontrer, et c'est cette démonstration que je vais donner. Je précise davantage: je vais montrer que toute variété à p dimensions peut être subdivisée de façon à former un polyèdre P, dont toutes les variétés a_i^p, a_i^{p-1}, ..., a_i^2, a_i^1, a_i^0 sont des tétraèdres généralisés.

Je supposerai que le théorème a été démontré pour une variété à $p - 1$ dimensions, et je me propose de l'étendre à une variété à p dimensions.

Nous présenterons la définition de notre variété sous la forme suivante, qui comprendra les deux définitions données dans l'*Analysis situs.*

Nous aurons les équations et les inégalités

$$(1) \qquad \begin{aligned} &x_i = \theta_i(y_1, y_2, \ldots, y_q), \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \\ &f_k(y_1, y_2, \ldots, y_q) = 0, \quad (k = 1, 2, \ldots, q - p) \\ &\varphi_h(y_1, y_2, \ldots, y_q) > 0. \end{aligned}$$

Ces équations et ces inégalités définiront une variété v qui sera limitée et, en général, non fermée; on aura différents systèmes analogues d'équations et d'inégalités, définissant autant de variétés partielles que j'appellerai v_1, v_2, ..., v_m.

Deux de ces variétés seront dites contiguës, si elles ont une partie commune, et je puis supposer que l'on peut passer d'un point quelconque de l'une de ces variétés à un point quelconque d'une autre quelconque d'entre elles, sans sortir de l'ensemble de ces variétés. Cet ensemble constituera la variété que j'appellerai V, et qu'il s'agissait de définir.

Je supposerai que cette variété V est bilatère.

C'est évidemment là la façon la plus générale possible de définir une variété.

Considérons la variété partielle v_1, définie par les équations (1).

D'après le théorème des fonctions implicites, on pourra satisfaire aux équations

$$f_k = 0,$$

en faisant

$$y_j = \psi_j(z_1, z_2, \ldots, z_p),$$

les ψ étant des fonctions holomorphes des z; mais les séries ψ pourront ne pas converger pour tous les points de la variété v_1.

Les conditions de convergence seront certaines inégalités :

$$\eta_k(z_1, z_2, \ldots, z_p) > 0.$$

Quand on remplacera les y en fonctions des z, les relations :

$$x_i = \theta_i, \qquad \varphi_h > 0$$

deviendront :

$$x_i = \theta'_i(z_1, z_2, \ldots, z_p)$$

$$\varphi'_h(z_1, z_2, \ldots, z_p) > 0.$$

Alors l'ensemble des relations

$$(1^{\text{bis}}) \qquad x_i = \theta'_i, \qquad \varphi'_h > 0, \qquad \eta_k > 0$$

définira une certaine variété v'_1, de telle façon que l'ensemble des variétés analogues à v'_1 reproduira la variété v_1.

Nous sommes ainsi ramenés à la seconde définition de l'*Analysis situs*.

Cela posé, soit v''_1 une autre variété v'_1 satisfaisant aux conditions suivantes : elle sera tout entière contenue dans v'_1 ; elle comprendra tous les points de v'_1 qui ne lui sont pas communs avec une des variétés contigües; par conséquent la frontière complète de v''_1 sera tout entière dans la partie commune à v'_1 et aux variétés contigües.

A chacune des variétés

$$v'_1, \; v'_2, \; \ldots,$$

dont l'ensemble constitue V, correspondra ainsi une variété

$$v''_1, \; v''_2, \; \ldots,$$

satisfaisant aux conditions que je viens d'énoncer; et il est clair qu'on peut s'arranger de telle façon que tout point de V appartienne à l'une des variétés v'', et à une seule, à moins qu'il ne soit sur la frontière de l'une des variétés v'', auquel cas il devra appartenir, en outre, à la frontière au moins d'une autre variété v''.

La variété V, ainsi subdivisée en variétés v'', constitue un polyèdre P, au sens donné à ce mot au § 2. Mais ce polyèdre ne convient pas encore à la question, car nous ne pouvons savoir si les variétés v'' sont des tétraèdres généralisés, ou même sont simplement connexes.

Considérons la variété v''_1, et soit :

$$z_1 = 0, \quad z_2 = 0, \; \ldots, \; z_p = 0$$

un point *intérieur à cette variété;* considérons la variété à une dimension:

$$z_1 = \alpha_1 t, \quad z_2 = \alpha_2 t, \; \ldots, \; z_p = \alpha_p t,$$

où les α sont des constantes, et où nous ferons varier t depuis 0 jusqu'à $+\infty$. C'est ce que j'appellerai un *rayon vecteur*.

Chaque rayon vecteur rencontrera la frontière complète de v''_1 en un nombre impair de points; en effet, quand on suivra ce rayon, en

faisant varier t de o à $+\infty$, on sortira de la variété v_1''; on pourra y rentrer ensuite et en sortir plusieurs fois, mais on finira toujours par en sortir pour n'y plus rentrer.

Il pourra se faire qu'un rayon vecteur rencontre la frontière de v_1'' en deux points confondus. Les rayons vecteurs qui satisfont à cette condition s'appelleront les *rayons remarquables*.

L'ensemble des rayons remarquables formera une ou plusieurs variétés à $p-1$ dimensions, que j'appellerai les *cônes remarquables*.

Les intersections des cônes remarquables avec la frontière de v_1'' formeront une ou plusieurs variétés à $p-2$ dimensions, que j'appellerai U, et ces variétés U partageront la frontière de v_1'' en régions que j'appellerai R.

Une région R ne peut être rencontrée par un rayon vecteur en plus d'un point; mais d'après ce que nous venons de voir, il peut se présenter deux cas : quand on suit ce rayon vecteur, en faisant croître t de o à ∞, on peut, au moment où on rencontre R, sortir de v_1'' ou y rentrer. Si le premier cas, par exemple, se présente pour un des vecteurs qui rencontrent R, il se présentera pour tous les vecteurs qui rencontrent R.

D'où la distinction des régions R en régions de la 1ère sorte, que les rayons vecteurs rencontrent en sortant de v_1'', et en régions de la 2de sorte, que les rayons vecteurs rencontrent en rentrant dans v_1''.

Les régions R étant des variétés à $p-1$ dimensions pourront, d'après l'hypothèse faite au début, être subdivisées en tétraèdres généralisés.

Supposons, pour fixer les idées, qu'un rayon vecteur rencontre trois fois la frontière de v_1'', qu'il rencontre successivement les régions R_1, R_2, R_3; R_1 et R_3 seront de la 1ère sorte, R_2 sera de la 2de sorte.

Subdivisons R_1 et R_3 en tétraèdres généralisés à $p-1$ dimensions.

Si T_1 est une des subdivisions de R_1, menons tous les rayons vecteurs qui passent par les différents points de T_1, et conservons la partie de ces rayons vecteurs qui est comprise entre le point $z_i = 0$ et le rayon R_1 (partie qui est intérieure à v_1''); l'ensemble de ces vecteurs formera un tétraèdre généralisé à p dimensions, ayant pour sommet le point $z_i = 0$, et pour base le tétraèdre généralisé à $p-1$ dimensions T_1.

Soit maintenant T_3 une des subdivisions de R_3; menons encore tous les rayons vecteurs qui passent par les différents points de T_3 et conservons la partie de ces rayons vecteurs qui est comprise entre R_2 e R_3 (partie qui est intérieure à v''_1). Cet ensemble forme une variété à $p - 1$ dimensions que l'on pourrait appeler un *tronc de tétraèdre généralisé,* dont les deux bases sont T_3 et un tétraèdre généralisé à $p - 1$ dimensions, que j'appellerai T_2 et qui fera partie de R_2. C'est, en d'autres termes, la différence de deux tétraèdres généralisés, ayant pour sommet commun le point $z_i = 0$ et pour bases l'un T_3, l'autre T_2.

Ce tronc de tétraèdre généralisé pourra à son tour être partagé en p tétraèdres généralisés, de même que dans le théorème classique, le tronc de pyramide triangulaire se partage en trois pyramides triangulaires.

Finalement v''_1 sera partagé en tétraèdres généralisés.

Une difficulté subsiste cependant; on peut subdiviser comme v''_1 les autres variétés analogues v''_2, v''_3, ... ; considérons la subdivision de v''_1 en tétraèdres généralisés T_1 et celle de v''_2 en tétraèdres généralisés T_2. La frontière commune de v''_1 et v''_2 se trouvera subdivisée d'une part en tétraèdres généralisés à $p - 1$ dimensions τ_1, qui seront les faces des T_1, et d'autres part en tétraèdres généralisés à $p - 1$ dimensions τ_2, qui seront les faces des T_2; *mais il n'est pas évident que ces deux subdivisions coïncident.*

Considérons alors la partie commune à l'un des τ_1 et à l'un des τ_2; je pourrai, d'après l'hypothèse faite au début, la subdiviser en tétraèdres généralisés à $p - 1$ dimensions σ. Ainsi chacun des tétraèdres τ_1 et chacun des tétraèdres τ_2 sera subdivisé en tétraèdres σ.

Soit maintenant τ'_1 une des variétés à q dimensions *appartenant* à τ_1 (j'emploie ici le mot appartenir dans le même sens que quand je dis que les faces, les arêtes et les sommets d'un tétraèdre ordinaire appartiennent à ce tétraèdre, ou quand je disais au § 2 que les variétés a^q_i appartenaient au polyèdre P). Soit de même τ'_2 une des variétés à q dimensions appartenant à τ_2. Ces deux variétés τ'_1 et τ'_2 seront des tétraèdres généralisés, puisque d'après la définition du tétraèdre généralisé, toute variété qui *appartient* à un tétraèdre généralisé, est elle-même un tétraèdre généralisé. Alors τ'_1 et τ'_2 se trouveront subdivisés en té-

traèdres généralisés à q dimensions σ, qui *appartiendront* aux tétraèdres à $p - 1$ dimensions σ.

Cela à la rigueur pourrait nous suffire; nos variétés v''_1, etc., seraient partagées en tétraèdres généralisés à p dimensions T^p, leurs frontières en tétraèdres à $p - 1$ dimensions T^{p-1}, etc.; seulement ces tétraèdres T^{p-1} ne seraient pas ceux qui appartiennent aux tétraèdres T^p, cela en seraient seulement des subdivisions.

Mais nous pouvons aller plus loin.

Considérons l'un des tétraèdres à p dimensions T^p dans lequel v''_1 est subdivisé. Je rappelle qu'on les a obtenus en subdivisant les troncs de tétraèdres généralisés, dont il a été question plus haut. Par conséquent T^p a tous ses sommets sur la frontière de v''_1 (il y aurait exception pour les tétraèdres dont un sommet est au point $z_i = 0$, mais pour ceux-là il n'y a pas de difficulté).

Supposons, par exemple, que les points communs à T^p et à la région que j'ai appelée plus haut R_3 forment un tétraèdre généralisé à q dimensions T^q *appartenant* à T^p, et que les points communs à T^p et à la région R_2 forment un tétraèdre à $p - q - 1$ dimensions T^{p-q-1}, appartenant à T^p.

Les tétraèdres T^q et T^{p-q-1} sont analogues aux tétraèdres τ'_1 traités plus haut; ils peuvent donc être subdivisés en tétraèdres analogues à ceux que j'ai appelés σ'; soient S_1^q, S_2^q ..., les tétraèdres analogues à σ', qui sont des subdivisions de T^q; soient S_1^{p-q-1}, S_2^{p-q-1},... les tétraèdres analogues à σ' qui sont des subdivisions de T^{p-q-1}. Je dis qu'on peut subdiviser T_k^p en tétraèdres à p dimensions de telle façon que les variétés S_1^q, S_2^q, ..., S_1^{p-q-1}, S_2^{p-q-1}, ... appartiennent à T^p.

Pour le démontrer je suppose d'abord que T^p soit un *tétraèdre rectiligne* (cfr. § 2 in fine). On sait qu'un tétraèdre rectiligne est entièrement défini quand on connait ses $p + 1$ sommets. Alors T^p est le tétraèdre rectiligne qui a pour sommets ceux de T^q et de T^{p-q-1}.

Supposons que T^q se décompose en g tétraèdres partiels :

$$S_1^q,\ S_2^q,\ \ldots,\ S_g^q,$$

et T^{p-q-1} en h tétraèdres partiels :

$$S_1^{p-q-1},\ S_2^{p-q-1},\ \ldots,\ S_h^{p-q-1}.$$

On vérifiera alors que T^p se décompose en gh tétraèdres partiels
ıi sont ceux dont les sommets sont ceux de

$$S_i^q \quad \text{et} \quad S_k^{p-q-1} \quad (i = 1, 2, \ldots, g;\ k = 1, 2, \ldots, h).$$

Si le tétraèdre T^p n'est pas rectiligne, le résultat subsiste puisque
ı tétraèdre quelconque est homéomorphe à un tétraèdre rectiligne.

Ainsi notre variété est décomposée en tétraèdres à p dimensions
: façon à former un polyèdre tel que toute variété appartenant à ce
olyèdre, appartient à l'un de ces tétraèdres.

On est ainsi débarrassé des derniers doutes qui pouvaient subsister
ı sujet de la possibilité de subdiviser une variété V de façon à former
ı polyèdre P, pour lequel tous les a_i^q soient simplement connexes.

Paris, mars 1899.

H. Poincaré.

SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES DE LIGNES TRACÉES SUR UNE SURFACE ALGÉBRIQUE;

par M. **Émile Picard**, à Paris.

Adunanza del 9 aprile 1899.

Considérons sur une surface algébrique deux systèmes *irréductibles* et *complets* $|C_1|$ et $|C_2|$ définis respectivement comme intersection de la surface f avec les deux systèmes linéaires de surfaces

$$\alpha_0 P_0 + \cdots + \alpha_r P_r = 0,$$

$$\beta_0 Q_0 + \cdots + \beta_{r'} Q_{r'} = 0.$$

Le système

(1) $$\sum \lambda_{j,k} P_j Q_k = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, r;\ k = 1, 2, \ldots, r')$$

définit un système *irréductible* qui contient totalement toutes les courbes composées $C_1 + C_2$, mais qui peut ne pas être complet. Envisageons alors le système complet $|C|$ défini par une courbe $C_1 + C_2$, ayant comme points-base les points-base de $|C_1|$ et de $|C_2|$, de telle sorte qu'un point-base d'ordre λ_1 pour $|C_1|$ et d'ordre λ_2 pour $|C_2|$ soit d'ordre $\lambda_1 + \lambda_2$ pour $|C|$. Ce système complet $|C|$ est, par définition,

la *somme des deux systèmes donnés*. Il est complètement déterminé par une courbe C_1 et par une courbe C_2, et en plus par les points-bases des deux systèmes et la manière de se comporter en ces points qui a été spécifiée.

Il est immédiat que si n_1 et n_2 sont les *degrés* respectifs des systèmes $|C_1|$ et $|C_2|$, et si i est le nombre des points variables de rencontre d'une courbe C_1 et d'une courbe C_2, on aura pour le degré n de $|C|$

$$n = n_1 + n_2 + 2i.$$

Dans son beau mémoire (*Introduzione alla geometria sopra le superficie algebriche,* Société Italienne des Sciences, 1896), M. Enriques établit (page 30) une formule donnant le genre de la courbe générale de $|C|$, et qui est toute semblable à celle que l'on connait dans le cas où la surface se réduit à un plan. En appelant π_1 et π_2 les genres respectifs d'une C_1 et d'une C_2, on a pour le genre π d'une courbe C

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1$$

La démonstration de M. Enriques fait intervenir des considérations assez délicates sur la connexion. Je veux indiquer comment on peut vérifier la formule précédente par un calcul tout élémentaire.

Désignons par q_1 le degré d'une courbe C_1 (qui n'a aucun rapport avec le *degré* du système $|C_1|$), et par q_2 le degré d'une courbe C_2; soient en outre λ_1 et λ_2 les ordres respectifs d'un même point-base pour les deux systèmes.

Effectuons la perspective des deux courbes C_1 et C_2 et d'une courbe C sur un plan arbitraire et en prenant un point de vue arbitraire. On aura pour la perspective de la courbe C_1

$$\pi_1 = \frac{(q_1 - 1)(q_1 - 2)}{2} - h_1 - k_1 - \sum \frac{\lambda_1(\lambda_1 - 1)}{2},$$

h_1 étant la part provenant des points multiples de C_1 situés sur les lignes multiples de la surface f, et k_1 le nombre des points doubles apparents de C_1. On aura de même pour la courbe C_2

$$\pi_2 = \frac{(q_2 - 1)(q_2 - 2)}{2} - h_2 - k_2 - \sum \frac{\lambda_2(\lambda_2 - 1)}{2}.$$

La courbe C étant déterminée par une surface appartenant au système des surfaces adjointes dont l'une détermine la courbe composée $C_1 + C_2$, son degré sera égal à $q_1 + q_2$; elle aura comme points multiples provenant des lignes multiples un nombre de points équivalent (pour notre problème) à $h_1 + h_2$ points doubles, et ceux provenant des points-bases seront d'ordre $\lambda_1 + \lambda_2$. Quant aux points doubles apparents de C, leur nombre sera égal à

$$k_1 + k_2 + H,$$

en désignant par H le nombre des points doubles apparents provenant des droites qui rencontrent à la fois C_1 et C_2 et passent par le point de vue. On a évidemment

$$q_1 q_2 = H + i + \sum \lambda_1 \lambda_2$$

et, comme manifestement

$$\pi = \frac{(q_1 + q_2 - 1)(q_1 + q_2 - 2)}{2} - h_1 - h_2 - k_1 - k_2 - H$$
$$- \sum \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)(\lambda_1 + \lambda_2 - 1)}{2},$$

on trouve de suite

$$\pi = \pi_1 + \pi_2 + i - 1,$$

comme nous voulions l'établir.

ÉMILE PICARD.

I VARII TIPI POSSIBILI DI QUARTICHE PIANE PIÙ VOLTE OMOLOGICO-ARMONICHE.

Nota di **Edgardo Ciani**, in Messina.

Adunanza del 9 aprile 1899.

In questo breve scritto mi propongo di ricercare quand'è che una quartica piana irriduttibile può essere trasformata in sè da più omologie armoniche.

I risultati che ho conseguito riguardo al numero e alle relazioni mutue di tali omologie sono riassunti al n° 13, nel quale ho riunito tutti i casi trovati e che sono anche i soli possibili. Figura fra di essi la nota quartica di Klein che è trasformata in sè da 21 omologie armoniche (*).

In quasi tutti i casi trovati è notevole la configurazione dei flessi per le mutue relazioni di posizione nelle quali essi vengono a essere vincolati per la esistenza delle omologie in parola. Altrettanto potrebbe dirsi per le bitangenti.

Mi sono limitato alle omologie armoniche perchè, come risulta dal n° 1, all'infuori di due casi ben ristretti, ogni omologia che muta in sè una quartica piana irriduttibile è necessariamente armonica.

(*) Klein: *Ueber die Transformation siebenter Ordnung der elliptischen Functionen*. Mathematische Annalen, Bd. XIV.

1. Se esiste una omologia capace di trasformare in sè una quartica piana irriduttibile, è certo che ogni curva polare del centro è pure mutata in sè per opera di tale omologia.

Dunque essa è armonica (generalmente) perchè la conica polare non può essere mutata in sè (generalmente) che da una omologia armonica. Fanno eccezione i casi seguenti:

(*a*) La conica polare è indeterminata.

(*b*) Oppure essa si compone di due rette passanti per il centro (distinte o coincidenti).

(*c*) Ovvero è formata dall'asse di omologia contato due volte e non passante per il centro.

(*d*) O finalmente è costituita dall'asse suddetto e da una retta passante per il centro.

Nel caso (*a*) il centro è un punto triplo e quindi non esistono omologie col centro in tal punto capaci di mutare la quartica in sè.

Nel caso (*b*) il centro è un punto doppio e l'unica omologia che abbia il centro in tal punto e che trasformi in sè la curva è necessariamente armonica.

Nel caso (*c*) si osservi che l'asse contato due volte costituisce la conica polare del centro, anche rispetto alla cubica polare del medesimo punto. Se quest'asse si prende come $x_1 = 0$ e il centro come $(1\ 0\ 0)$, la cubica in parola sarà

$$x_1^3 + \varphi(x_2, x_3) = 0 \tag{1}$$

(dove φ è del 3° grado) e la quartica sarà:

$$x_1[x_1^3 + \varphi(x_2, x_3)] + \psi(x_2, x_3) = 0 \tag{2}$$

(dove ψ è del 4° grado). Le omologie col centro in $(1\ 0\ 0)$ e che mutano la (1) in sè sono le sole

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \varepsilon x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \varepsilon^2 x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

con ε, ε^2 radici cubiche immaginarie dell'unità. Ma esse non trasfor-

mano in sè certamente la (2), dunque bisogna che φ sia nullo identicamente e che quindi la (2) divenga

$$x_1^4 + \psi(x_2, x_3) = 0,$$

nel qual caso le omologie $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \pm i x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$ sono le sole omologie non armoniche col centro in (1 0 0) e trasformanti in sè la quartica.

Finalmente nel caso (d) si vede che la cubica polare ha necessariamente un flesso nel centro d'omologia e quindi se è irriduttibile la sola omologia che la trasformi in sè è manifestamente armonica. Se poi tale cubica si spezza, si vede subito che l'unica ipotesi che rimanga utilmente a discutersi è che la cubica in parola si componga di una retta per (1 0 0) e dell'asse contato due volte. Ma allora l'equazione della quartica è necessariamente:

$$x_1^3 x_2 + f(x_2, x_3) = 0,$$

dove f è del 4° grado. Nel qual caso le omologie

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \varepsilon x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & \varepsilon^2 x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

sono le sole omologie non armoniche col centro in (1 0 0) e trasformanti in sè la quartica. Abbiamo così trovato due soli casi di eccezione ed è ovvio il caratterizzarli geometricamente. Ciò è espresso dal teorema seguente nel quale essi sono considerati:

Ogni omologia che trasforma in sè stessa una quartica piana irriduttibile è armonica, meno che nei due casi caratterizzati dalle due equazioni seguenti:

$$x_1^4 + \varphi(x_2, x_3) = 0,$$

$$x_1^3 x_2 + f(x_2, x_3) = 0$$

(φ e f binarie biquadratiche).

Nel 1° la quartica possiede 4 *punti di ondulazione sull'asse di omo-*

logia con le tangenti di ondulazione concorrenti nel centro di omologia e le omologie che fanno eccezione sono:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \pm i x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Nel 2° caso la curva possiede 4 flessi sull'asse di omologia con le tangenti di flesso concorrenti nel centro di omologia che è per la quartica un punto di ondulazione. Le omologie che fanno eccezione sono

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \varepsilon x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_2 \\ \varepsilon^2 x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

dove ε, ε^2 *sono le radici cubiche immaginarie dell'unità.*

2. Sia adesso una omologia armonica che trasformi in sè stessa una quartica piana irriduttibile (in tutto quel che segue la irriduttibilità della quartica è ipotesi essenziale e sottintesa).

Sono proprietà evidenti o facili a dimostrarsi le seguenti: Se la quartica non ha punti singolari, il centro di omologia non può essere sulla curva: la cubica polare del centro si compone dell'asse di omologia e di una conica c rispetto alla quale il centro e l'asse sono polo e polare (cioè il centro è uno dei 21 punti doppi della Steineriana).

Segue che le 12 tangenti condotte dal centro alla quartica sono generalmente costituite dalle 4 tangenti nei 4 punti in cui l'asse taglia la curva e dalle 4 bitangenti passanti ognuna per due punti comuni a c e alla quartica.

Se poi il centro di omologia è sulla quartica, esso è un punto doppio per la curva: le tangenti nodali sono anche tangenti di flesso e compongono la conica c precedente.

3. A queste semplici osservazioni ne aggiungeremo altre due che sono meno evidenti e che ci occorrono nel seguito.

La 1ª è: « Non possono esistere due omologie armoniche trasformanti in sè la quartica e dotate del medesimo asse ». Infatti si prendano: questo asse per $x_3 = 0$, la retta che unisce i centri per $x_1 = 0$

e su di essa i punti (0 0 1), (0 1 1) come centri. La omologia di cui è centro (0 0 1) esige che l'equazione sia pari in x_3, cioè:

$$\begin{gathered} a x_3^4 + (b x_1^2 + c x_1 x_2 + d x_2^2) x_3^2 + e x_1^4 + f x_1^3 x_2 \\ + g x_1^2 x_2^2 + h x_1 x_2^3 + e x_2^4 = 0. \end{gathered}$$

La 2ª omologia è

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 - 2x_3 & -x_3 \end{pmatrix}$$

e quindi per essa l'equazione diviene:

$$\begin{gathered} a x_3^4 + [b x_1^2 + c x_1 (x_2 - 2 x_3) + d (x_2 - 2 x_3)^2] x_3^2 + e x_1^4 \\ + f x_1^3 (x_2 - 2 x_3) + g x_1^2 (x_2 - 2 x_3)^2 \\ + h x_1 (x_2 - 2 x_3)^3 + l (x_2 - 2 x_3)^4 = 0; \end{gathered}$$

ma poichè la curva deve essere trasformata in sè, anche la equazione ultima deve essere pari in x_3, il che esige che sia prima $l = g = f = h = 0$ e in conseguenza $c = d = 0$. Ma allora la curva si spezza.

Non possono nemmeno esistere omologie armoniche trasformanti in sè la quartica e dotate dello stesso centro. Perchè la retta polare del centro deve essere unita per entrambe e quindi passa per il centro, o è indeterminata. Ma se passa per il centro questo è sulla curva e quindi è per essa un punto doppio (nº 2), dunque la retta polare è indeterminata. Ora, quando il centro è un punto doppio è ben evidente che le due omologie in parola non possono esistere.

4. Ciò posto, cominciamo dall'esaminare se una quartica piana irreduttibile può ammettere più di una omologia armonica che la trasformi in sè stessa. Supponiamo che esistano due tali omologie così che sulla retta che ne congiunge i centri non esista alcun altro centro di altra omologia trasformante in sè la quartica. Se A, A' sono i centri e a, a' gli assi rispettivi, è manifesto che A' giacerà sopra a e A sopra a', altrimenti trasformando una delle omologie supposte mediante l'altra troveremmo una 3ª omologia trasformante in sè la nostra quartica e

col centro sopra AA', il che è contrario alla ipotesi fatta. Allora la equazione della curva riferita al triangolo a, a', AA' è manifestamente:

$$(1) \qquad a x_1^4 + b x_2^4 + c x_3^4 + a x_1^2 x_2^2 + e x_1^2 x_3^2 + f x_2^2 x_3^2 = 0,$$

ciò che prova la esistenza di una 3^a omologia di cui il centro e l'asse sono rispettivamente il punto $a.a'$ e l'asse AA'. Esiste dunque un triangolo tale che ogni vertice col lato opposto individua una omologia armonica trasformante in sè la curva.

5. Ci proponiamo adesso di considerare, primieramente, tutti i casi possibili nei quali esistano omologie armoniche trasformanti in sè la curva con i centri in linea retta. Distinguiamo due casi a seconda che tale retta incontra, o no, la curva in 4 punti distinti e incominciamo a trattare il primo.

Sia r tale retta, A un centro su di essa, a l'asse relativo e A' il punto $a.r$. I 4 punti della quartica sopra r debbono distribuirsi in due coppie armoniche rispetto ad AA'. Dunque AA' deve essere una coppia del covariante sestico della binaria biquadratica rappresentata dai 4 punti suddetti. Se esiste una sola coppia come AA' si ha la (1) del n° precedente.

Sia adesso B un nuovo centro su di r, b l'asse relativo e B' il punto $b.r$. La coppia BB' deve quindi coincidere con una delle altre due coppie del covariante suddetto.

Ora se noi effettuiamo la trasformazione omologica (A, a) sulla (B, b), è manifesto che i punti BB' si scambiano fra loro (perchè il gruppo $AA'BB'$ costituito da due coppie del covariante sestico in parola è un gruppo armonico). Dunque esiste una quarta omologia armonica che trasforma in sè la quartica e che ha per centro B' e l'asse passante per B. Cioè la coppia BB' deve trovarsi in condizioni uguali della AA'. Allora riferendosi alla equazione del n° precedente, scegliamo il punto unità in guisa che, essendo $r \equiv x_3 = 0$, sia $(1\,1\,0)$, $(1\ -1\ 0)$ la nuova coppia BB'. L'omologia armonica di cui è centro $(1\,1\,0)$ e asse $x_1 + x_2 + k x_3 = 0$ è data dalla sostituzione

$$\begin{pmatrix} x^1 & x_2 & x_3 \\ x_2 + k x_3 & x_1 + k x_3 & -x_3 \end{pmatrix}.$$

Essa, applicata alla (1) del n° precedente, la trasforma in

$$a(x_2 + kx_3)^4 + b(x_1 + kx_3)^4 + cx_3^4 + d(x_2 + kx_3)^2(x_1 + kx_3)^2 \\ + e(x_2 + kx_3)^2 x_3^2 + f(x_1 + kx_3)^2 x_3^2 = 0;$$

ma questa deve essere nuovamente pari in x_1, x_2, x_3, il che richiede prima di tutto $k = 0$; quindi la nuova omologia supposta è $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & -x_3 \end{pmatrix}$ e se la nostra equazione deve rimanere invariata per opera di questa omologia, deve essere necessariamente $a = b$, $e = f$ e l'equazione diviene:

$$(2) \qquad a(x_1^4 + x_2^4) + dx_1^2 x_2^2 + ex_3^2(x_1^2 + x_2^2) + cx_3^4 = 0;$$

in questo caso la curva possiede le 4 omologie, con i centri in linea retta e gli assi passanti per un punto, che sono individuate rispettivamente da

$$(1\,0\,0) \quad (0\,1\,0) \qquad (1\,1\,0) \qquad (1\; -1\,0)$$

$$x_1 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_1 + x_2 = 0 \quad x_1 - x_2 = 0$$

e oltre queste possiede pure la omologia di cui è centro il punto comune agli assi precedenti e asse la retta che unisce i centri.

Finalmente si vede che se $e = f = 0$ tutt'e tre le coppie del covariante sestico in questione si comportano ugualmente: l'equazione è

$$(3) \qquad a(x_1^4 + x_2^4) + dx_1^2 x_2^2 + cx_3^4 = 0,$$

e la curva possiede oltre le omologie precedenti le altre due di cui i centri e gli assi sono

$$(1 \quad i \quad 0) \qquad (1 \quad -i \quad 0)$$

$$x_1 - ix_2 = 0 \quad x_1 + ix_2 = 0.$$

Il caso in cui la r tagli la curva in punti distinti è così esaurito

e sarebbe facile vedere che le forme (2) e (3) trovate in generale non si spezzano. Risulta anche dal corso del ragionamento che, nel caso ora trattato, l'essere i centri in linea retta porta che gli assi relativi passino per uno stesso punto.

6. Supponiamo adesso che la r non incontri la quartica in punti tutti distinti. Anzi cominciamo dall'ammettere che tali punti siano riuniti in uno solo che indicheremo con P e consideriamo due delle supposte omologie (sempre con i centri sulla r). Il punto P deve essere unito per entrambe, dunque, per le osservazioni già fatte al n° 3, non v'è altra ipotesi possibile che P per l'una sia centro e appartenga all'asse dell'altra. Cioè, indicando con p l'asse di P e con A, a il centro e l'asse dell'altra, deve il punto P trovarsi sopra a, cioè essere il punto $a.r$. Segue che A si trova sopra p, altrimenti effettuando la trasformazione omologica (A, a) sulla (P, p) troveremmo due omologie con lo stesso centro e con assi diversi trasformanti in sè la curva, ciò che è in contraddizione col n° 3. Allora il triangolo a, p, r è tale che ogni vertice col lato opposto individua una omologia trasformante in sè la curva e quindi assumendo tale triangolo come fondamentale la equazione deve riuscire pari in x_1, x_2, x_3. D'altra parte la $x_1 = 0$ deve incontrare la curva in 4 punti riuniti in $P = (1\,0\,0)$, quindi tale equazione sarà necessariamente della forma:

$$b x_2^4 + c x_3^4 + e x_1^2 x_3^2 + f x_2^2 x_3^2 = 0.$$

Si vede subito che sulla r non vi può essere un altro centro perchè dovrebbe l'asse passare per P e quindi il centro suddetto coincidere con A. Ma allora segue che l'asse deve per intero coincidere con a altrimenti esisterebbero due omologie armoniche trasformanti in sè la curva e dotate dello stesso centro e di assi diversi, il che al solito è in contraddizione col n° 3. Dunque, se la r incontra la quartica in 4 punti riuniti, si ricade nel caso del n° 4.

Il medesimo ragionamento e la stessa conclusione possono ripetersi se la r incontra in 3 punti distinti la quartica, perchè quello fra questi tre punti che vale due deve essere unito in tutte le omologie supposte e tiene luogo del punto P del caso precedente.

7. Rimane a discutere il caso in cui la r incontri la curva in due soli punti. Essi possono essere entrambi punti di contatto, o entrambi punti doppi, ovvero: l'uno punto di contatto e l'altro punto doppio, o finalmente può l'uno contare come tre e l'altro come uno. Ma se tali punti si trovano in condizioni dissimmetriche come ammettono le ultime due ipotesi, essi debbono essere uniti in tutte le omologie supposte e quindi si ricade nella conclusione del n° precedente.

Supponiamo adesso che questi punti siano doppi entrambi. Saranno contemporaneamente o nodi, o cuspidi (se fossero nodo e cuspide si troverebbero in condizioni dissimmetriche e quindi ecc). Se sono nodi, si osservi che ogni omologia supposta deve cambiare in sè le tangenti nodali. Dunque essa o ha il centro in un vertice del trilatero diagonale del quadrilatero formato con le tangenti suddette e per asse il lato opposto, ovvero ha il centro in un nodo e ha per asse la congiungente dell'altro nodo con quel vertice del trilatero in parola che si oppone a r. Quindi sulla r non si possono avere che uno, due, o 4 centri. Il caso di due è contenuto nel n° 4.

Per il caso dei 4 centri si assuma il trilatero di prima come trilatero fondamentale e i punti (1 1 0), (1 — 1 0) come punti doppi e si troverà l'equazione:

$$a(x_1^2 - x_2^2)^2 + ex_3^2(x_1^2 + x_2^2) + cx_3^4 = 0;$$

essa non è che un caso particolare della (2) del n° 5 per $d = -2a$ (anzi può servire a dimostrarci che la x_3 di quel caso non può mai essere una bitangente).

Se finalmente si tratta di due cuspidi, prendendo la r per $x_3 = 0$ e per $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ le tangenti cuspidali, l'equazione è

$$ax_1^2x_2^2 + bx_3^3x_1 + cx_3^3x_2 + gx_1x_2x_3^2 + fx_3^4 = 0,$$

la quale ci dice che b e c non possono essere zero contemporaneamente se no la curva si spezza. Dunque una almeno delle tangenti cuspidali incontra la curva fuori della cuspide in un punto. In questo caso l'unica omologia possibile ha il centro in una cuspide e per asse la tangente nell'altra cuspide ($b = 0$, oppure $c = 0$ nella equazione

precedente). Se poi entrambe le tangenti cuspidali incontrano ciascuna la curva in un punto fuori delle cuspidi, allora può sussistere una omologia di cui il centro è il punto comune a r e alla congiungente i punti d'incontro (fuori delle cuspidi) delle tangenti cuspidali con la curva. Ciò accade quando $b = c$ e l'omologia è $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}$ con centro in $(1\ -1\ 0)$ e asse $x_1 - x_2 = 0$. Ma in tal caso non può coesistere l'altra $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$, ovvero l'altra $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & -x_2 & x_3 \end{pmatrix}$, a meno che la curva non si spezzi.

Sarebbe facile vedere che ciò è vero anche quando l'ulteriore punto comune alle tangenti cuspidali e alla curva è il punto d'incontro delle tangenti suddette.

In conclusione, se la r contiene due punti doppi della quartica, non si è condotti a nessun caso nuovo.

8. Ammettiamo adesso che la r sia bitangente e che esistano due omologie coi centri sopra tale retta. Intanto un centro non può essere un punto di contatto altrimenti quel punto sarebbe doppio (n° 2), ma nemmeno può trovarsi sopra un asse perchè il centro relativo, non potendo essere l'altro punto di contatto, i punti di contatto della r verrebbero a essere più di due. Dunque se A, a sono centro e asse di una delle omologie supposte ed è $A' \equiv a.r$, la coppia AA' deve essere armonica alla coppia dei punti di contatto suddetti. Prendendo questi come $(0\ 1\ 0)$, $(1\ 0\ 0)$, la equazione della quartica sarà:

$$a x_3^4 + b x_3^3 + c x_3^2 + d x_3 + e x_1^2 x_2^2 = 0,$$

dove le b, c, d sono binarie in x_1, x_2 di grado 1, 2, 3.

Se ora si prende A' come $(1\ -1\ 0)$ e $a \equiv x_1 - x_2 = 0$ la omologia supposta è $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}$ e quindi la equazione precedente, scrivendola per disteso, è:

$$\begin{gathered} a x_3^4 + b x_3^3 (x_1 + x_2) + x_3^2 [c(x_1^2 + x_2^2) + c' x_1 x_2] \\ + x_3 [d(x_1^3 + x_2^3) + d'(x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2)] + e x_1^2 x_2^2 = 0. \end{gathered}$$

Sia B, b centro e asse della 2ª omologia supposta e pongasi $B' \equiv b.r$: allora la coppia BB' è anche armonica rispetto alla coppia dei punti di contatto. Nè può BB' coincidere con $A'A$ altrimenti saremmo nel n° 4 e già osservammo che allora (n° 7) $x_3 = 0$ non può essere una bitangente (il che del resto è facile riconoscere anche geometricamente).

Dunque, preso B come punto $(1, -\lambda, 0)$, si può prendere per b la $\lambda x_1 - x_2 = 0$ e la omologia (B, b) è $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & \lambda^2 x_1 & \lambda x_3 \end{pmatrix}$.

Se si esige che la equazione precedente ritorni in sè per opera di questa omologia, si vede che deve essere necessariamente λ una delle radici cubiche immaginarie dell'unità e inoltre

$$b = c = d' = 0.$$

La equazione assume la forma:

$$\alpha x_3^4 + \beta x_3^2 x_1 x_2 + \gamma x_3 (x_1^3 + x_2^3) + \delta x_1^2 x_2^2 = 0,$$

e la quartica è mutata in sè dalle tre omologie armoniche

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \varepsilon^2 x_1 & \varepsilon x_1 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ \varepsilon x_2 & \varepsilon^2 x_1 & x_3 \end{pmatrix},$$

di cui i centri sono:

$$(1 \;\; -1 \;\; 0), \qquad (1 \;\; -\varepsilon \;\; 0), \qquad (1 \;\; -\varepsilon^2 \;\; 0)$$

e gli assi

$$x_1 - x_2 = 0, \quad x_1 - \varepsilon^2 x_2 = 0, \quad x_1 - \varepsilon x_2 = 0,$$

e il corso del ragionamento prova che se esiste una omologia col centro sopra r, essa è certamente una delle tre precedenti. I tre centri e i tre punti d'incontro con gli assi della retta r rappresentano due binarie cubiche tali che l'una è la forma Q dell'altra, cioè una è ottenuta dall'altra cercando il 4° armonico di un elemento rispetto agli altri due. Il gruppo hessiano comune è quello dei punti di contatto.

9. I n[i] 4, 5, 6, 7, 8 esauriscono tutti i casi possibili di omologie con i centri in linea retta. È notevole osservare che, di conseguenza, gli assi passano sempre per un medesimo punto. Possiamo anche concludere, in sostanza, che se una quartica ammette varie omologie armoniche che la trasformino in sè medesima, considerandone due qualunque di cui i centri siano A, B e ripetendo per la retta AB tutti i ragionamenti fatti antecedentemente per la retta r, siamo necessariamente condotti all'una, o all'altra, delle due forme seguenti:

$$(1) \qquad a x_1^4 + b x_2^4 + c x_3^4 + 2 d x_1^2 x_2^2 + 2 e x_1^2 x_3^2 + 2 f x_2^2 x_3^2 = 0,$$

$$(2) \qquad \alpha x_3^4 + \beta x_3^2 x_1 x_2 + \gamma x_3 (x_1^3 + x_2^3) + \delta x_1^2 x_2^2 = 0$$

Vogliamo adesso esaminare a quali forme particolari di queste siamo condotti quando si consideri una delle altre omologie supposte col centro fuori della retta AB.

10. Cominciamo dalla (1). Sia ABC il triangolo fondamentale, O e o il centro e l'asse della nuova omologia supposta così che O giace fuori dei lati del triangolo suddetto. Osserviamo subito che O non può essere punto doppio della quartica altrimenti tali sarebbero anche i tre corrispondenti di O nelle tre omologie del triangolo fondamentale e la curva si spezzerebbe. Segue che O è esterno alla curva (n° 2).

Allora per la retta OA potremo ripetere tutti i ragionamenti dei n[i] precedenti: cioè indicando con A' il punto $OA.BC$ e con O' il punto $o.OA$, avremo $(AA'OO') = -1$ se siamo nel caso del n° 5 ovvero, se siamo nel caso del n° 8, esisterà un'altra omologia (M, m) col centro M sulla OA in guisa che si avrà

$$(OMAA') = -1, \quad (AMOO') = -1.$$

Il caso del n° 4 lo escludiamo a priori perchè se O' coincidesse con A, A' coinciderebbe con O, cioè O si troverebbe sopra un lato del triangolo fondamentale, il che è contrario alla ipotesi. Ciò posto prendiamo A come $(0\,0\,1)$ e O come $(1\,1\,1)$: nel caso del n° 5, essendo

$(AA'OO') = -1$, troveremo $O' \equiv (1, 1, -1)$ e nel caso del n° 8, essendo $(OMAA') = -1$, $(AMOO') = -1$, troveremo: $M \equiv (1, 1, -1)$ e dopo $O' \equiv (1, 1, -3)$. Indicando con O'', O''' i punti analoghi a O' situati sopra OB, OC, è d'uopo osservare che O', O'', O''' debbono essere in linea retta (la o) e quindi è possibile solamente la ipotesi

$$O' \equiv (1, 1, -1), \quad O'' \equiv (1, -3, 1), \quad O''' \equiv (-3, 1, 1)$$

o le analoghe. Segue che la o è la retta:

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0.$$

La cubica polare del centro rispetto alla quartica è

$$a x_1^3 + b x_2^3 + c x_3^3 + d(x_1^2 x_2 + x_1 x_2^2) + e(x_1^2 x_3 + x_1 x_3^2) \\ + f(x_2^2 x_3 + x_2 x_3^2) = 0;$$

essa, secondo il n° 2, deve spezzarsi nella retta

$$x_1 + x_2 + 2x_3 = 0,$$

e nella conica:

$$m x_1^2 + n x_2^2 + p x_3^2 + 2q x_1 x_2 + 2r x_1 x_3 + 2s x_2 x_3 = 0,$$

in guisa che la 1ª sia polare di $(1\,1\,1)$ rispetto alla 2ª. Il che richiede che sia:

$$m = n, \qquad r = s = -q, \qquad p = 2(q + n),$$

onde la conica precedente è

$$\lambda(x_1^2 + x_2^2) + 2(\lambda - \mu)x_3^2 + 2\mu(-x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = 0$$

e la quartica è

$$(1) \qquad \lambda(x_1^4 + x_2^4) + 4(\lambda - \mu)x_3^4 + 2(\lambda - 2\mu)x_1^2 x_2^2 \\ + 4(\lambda + \mu)(x_1^2 x_3^2 + x_2^2 x_3^2) = 0.$$

Ora applicando la trasformazione lineare

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 + x_2 & x_1 - x_2 & x_3 \end{pmatrix},$$

la quartica precedente diviene

$$\sum x_i^4 + 2\left(\frac{\lambda + \mu}{\lambda - \mu}\right) \sum x_i^2 x_k^2 = 0,$$

la quale sarà discussa al n° 12.

11. Passiamo adesso alla (2) del n° 9 e facciamo considerazioni analoghe. Abbiamo dunque la quartica

$$\alpha x_3^4 + \beta x_3^2 x_1 x_2 + \gamma x_3 (x_1^3 + x_2^3) + \delta x_1^2 x_2^2 = 0$$

e vogliamo esaminare se può ammettere una omologia (O, o) col centro fuori della $x_3 = 0$. Sieno A, B, C i centri sopra quest'ultima retta, a, b, c gli assi. Noi potremo ripetere per le rette OA, OB, OC i ragionamenti fatti nel n° precedente. Ad es. la OA presenta i tre casi:

1° l'asse o passa per A e quindi a per O,

2° si ha $(AA'OO') = -1$ (dove $A \equiv a.AO$),

3° esiste sulla OA un altro centro M così che

$$(OMAA') = -1, \qquad (AMOO') = -1.$$

Nel 1° caso la curva riferita alle tre rette a, o, OA è rappresentata da una equazione pari in $x_1 x_2 x_3$ (n° 4) e quindi si ricade nel n° precedente. Altrettanto può dirsi nel 2° caso perchè allora sulla retta OA esistono 4 centri e valgono le considerazioni del n° 5.

Rimane il 3° caso per il quale si avrà contemporaneamente:

$$(OMAA') = -1, \qquad (AMOO') = -1$$

$$(OM_1BB') = -1, \qquad (BM_1OO'') = -1$$

$$(OM_2CC') = -1, \qquad (CM_2OO''') = -1.$$

I punti A, B, C hanno per coordinate rispettivamente (n° 8)

$$(1 \quad -1 \quad 0), \qquad (1 \quad -\varepsilon \quad 0), \qquad (1 \quad -\varepsilon^2 \quad 0),$$

e gli assi sono:

$$x_1 - x_2 = 0, \qquad x^1 - \varepsilon^2 x_2 = 0, \qquad x_1 - \varepsilon x_2 = 0.$$

Il punto O abbia le coordinate $y_1 y_2 y_3$. Si vede facilmente allora che si ha:

$$O' \equiv (2 y_2 - y_1, \quad 2 y_1 - y_2, \quad y_3)$$

$$O'' \equiv (2 \varepsilon^2 y_2 - y_1, \quad 2 \varepsilon y_1 - y_2, \quad y_3)$$

$$O''' \equiv (2 \varepsilon y_2 - y_1, \quad 2 \varepsilon^2 y_1 - y_2, \quad y_3).$$

Ora i punti O', O'', O''' debbono essere in linea retta (la o): esprimendo questa condizione si trova:

$$y_1 y_2 y_3 = 0$$

Ma $y_3 \neq 0$ perchè il centro O è supposto fuori di $x_3 = 0$. Quindi si ha: o $y_1 = 0$, oppure $y_2 = 0$, ovvero $y_1 = 0$, $y_2 = 0$ insieme.

Ma in quest'ultimo caso poichè gli assi a, b, c passano per O, ne viene che la $x_3 = 0$ è l'asse di O, ma allora $\gamma = 0$ e la curva si spezza. Se poi $y_1 = 0$, $y_2 \neq 0$ la retta o diviene

$$x_2 y_3 + x_3 y_2 = 0,$$

cioè o passa per uno dei punti di contatto di $x_3 = 0$ con la quartica: d'altra parte $x_3 = 0$ non è unita in questa nuova omologia, dunque in $(1\,0\,0)$ si avrebbero 2 tangenti, il che è assurdo perchè $(1\,0\,0)$ non è doppio. Dunque la conclusione di questo n° e del precedente si è che non rimane altro che da esaminare il fascio di quartiche

$$\sum x_i^4 + \lambda \sum x_i^2 x_k^2 = 0.$$

12. Cambiando il parametro del fascio ne scriveremo più opportunamente la equazione così

$$(1) \qquad \sum x_i^4 + 6\lambda \sum x_i^2 x_k^2 = 0,$$

per $\lambda = -\frac{1}{3}$ la quartica del fascio si spezza nelle 4 rette:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0, \qquad x_1 - x_2 + x_3 = 0$$

$$-x_1 + x_2 + x_3 = 0, \qquad x_1 + x_2 - x_3 = 0$$

formanti un quadrilatero che ha per trilatero diagonale il fondamentale. Invece per $\lambda = \frac{1}{3}$ si ha la conica doppia $(\sum x_i^2)^2 = 0$, la quale è manifestamente la cosidetta conica dei 14 punti del quadrilatero precedente (cioè la conica che passa per il gruppo hessiano dei 3 vertici su ciascun lato). Si può quindi considerare il fascio come individuato da un quadrilatero e dalla conica dei suoi 14 punti contata due volte; i lati del quadrilatero sono bitangenti a ciascuna curva del fascio. Si riconosce facilmente che esistono 9 omologie armoniche trasformanti in sè contemporaneamente la conica e il quadrilatero. Sei di esse hanno per centri i vertici del quadrilatero e per assi le polari dei vertici rispetto alla conica in parola, tre hanno per centri e per assi i vertici e i lati del trilatero diagonale (che nel nostro caso è il fondamentale). Si vede anche facilmente che queste 9 omologie trasformano in sè ogni curva del fascio (n° 13, VI).

Si domanda adesso: Potranno esistere altre omologie trasformanti in sè qualche curva particolare del fascio? Per rispondere a questa domanda distingueremo due casi: o il centro della nuova omologia supposta giace sul triangolo fondamentale, ovvero non gli appartiene. Nel 1° caso se il lato che lo contiene è $x_3 = 0$, esso in forza delle considerazioni dei n[i] 4, 5 deve contenere sei centri e le omologie che si aggiungono sono le due: $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2 & x_1 & ix_3 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & -x_1 & ix_3 \end{pmatrix}$

e per conseguenza le altre 4 analoghe:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & ix_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & ix_2 & -x_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ ix_1 & -x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ ix_1 & x_2 & -x_3 \end{pmatrix}.$$

Ma esse trasformano in sè la

$$\sum x_i^4 = 0$$

e non la $\sum x_i^2 x_k^2 = 0$, dunque l'unica curva del fascio (1) che le ammetta è $\sum x_i^4 = 0$. Questa curva possiede in tutto 15 omologie armoniche e cioè le 9 citate avanti e comuni a tutte le curve del fascio e altre 6 di ognuna delle quali è centro un punto comune alla conica dei 14 punti e a un lato del triangolo fondamentale, e asse la tangente alla stessa conica nell'altro punto in cui essa è incontrata dal lato suddetto.

Andiamo al 2° caso. Esista dunque un nuovo centro P fuori dei lati del triangolo fondamentale. Potremo applicare a questo nuovo centro P e al triangolo suddetto tutte le considerazioni del n° 10. Cioè sopra la congiungente di tale centro P con uno dei vertici del triangolo fondamentale devono esistere in tutto quattro centri e su ciascuna delle altre due congiungenti di P con i due vertici fondamentali rimanenti devono esistere in tutto tre centri. Sia (0 0 1) il 1° vertice suddetto e (1 0 0), (0 1 0) gli altri due. Sulla retta che unisce P a (0 0 1) debbono dunque trovarsi in tutto 4 centri, quindi (n° 5) uno di questi deve essere sulla $x_3 = 0$ e, se non vogliamo ricadere nel caso di dianzi, esso sarà uno dei punti (1 1 0), (1 —1 0).

Quindi le coordinate di P saranno della forma

$$(1, 1, \mu)$$

e l'asse relativo sarà (n° 10)

$$\mu(x_1 + x_2) + 2x_3 = 0,$$

e finalmente l'omologia armonica che ha per centro e per asse il punto e la retta precedenti sarà:

$$\left(\frac{x_1}{\mu(x_2 - x_1) + 2x_3}, \quad \frac{x_2}{\mu(x_1 - x_2) + 2x_3}, \quad \frac{x_3}{\mu^2(x_1 + x_2)}\right).$$

Esigiamo adesso che una curva del fascio

$$\sum x_i^4 + 6\lambda \sum x_i^2 x_k^2 = 0$$

sia trasformata in sè dalla omologia precedente.

Eseguiti i calcoli troveremo facilmente le soluzioni seguenti:

$$\mu = \frac{1 + i\sqrt{7}}{2}, \quad \lambda = \frac{-1 - i\sqrt{7}}{4},$$

$$\mu = \frac{1 - i\sqrt{7}}{2}, \quad \lambda = \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4},$$

$$\mu = \pm\sqrt{2}, \qquad \lambda = \frac{1}{3};$$

l'ultimo caso lo escludiamo perchè la curva del fascio corrispondente a $\lambda = \frac{1}{3}$ è la conica doppia $\sum x_i^2 = 0$.

Rimangono i primi due. Nell'uno e nell'altro la quartica possiede in tutto 21 omologie armoniche: cioè le 9 del fascio e le altre dodici di cui i centri e gli assi sono rispettivamente:

$$\left\{\begin{array}{llll} (\ 1 & 1 & \mu), & \mu(\ x_1 + x_2) + 2x_3 = 0; \\ (-1 & 1 & \mu), & \mu(-x_1 + x_2) + 2x_3 = 0; \\ (\ 1 & -1 & \mu), & \mu(\ x_1 - x_2) + 2x_3 = 0; \\ (\ 1 & 1 & -\mu), & \mu(\ x_1 + x_2) - 2x_3 = 0; \end{array}\right.$$

$$\begin{cases} (\ \ 1 & \mu & 1), & \mu(\ \ x_1 + x_3) + 2x_2 = 0; \\ (-1 & \mu & 1), & \mu(-x_1 + x_3) + 2x_2 = 0; \\ (\ \ 1 & -\mu & 1), & \mu(\ \ x_1 + x_3) - 2x_2 = 0; \\ (\ \ 1 & \mu & -1), & \mu(\ \ x_1 - x_3) + 2x_2 = 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} (\ \ \mu & 1 & 1), & \mu(\ \ x_2 + x_3) + 2x_1 = 0; \\ (-\mu & 1 & 1), & \mu(\ \ x_2 + x_3) - 2x_1 = 0; \\ (\ \ \mu & -1 & 1), & \mu(-x_2 + x_3) + 2x_1 = 0; \\ (\ \ \mu & 1 & -1), & \mu(\ \ x_2 - x_3) + 2x_1 = 0; \end{cases}$$

dove

$$\mu = \frac{1 \pm i\sqrt{7}}{2}.$$

Le due quartiche così trovate appartengono al tipo già menzionato di Klein (loc. cit.) e sarebbe facile con opportune trasformazioni di coordinate ridurne l'equazione a una delle forme già conosciute.

Del resto torneremo sull'argomento al n° 18.

Le considerazioni di questo n° provano che la nostra discussione è esaurita.

13. Riassumeremo tutti i casi trovati nel seguente enunciato:

I tipi possibili di quartiche piane irriduttibili più volte omologico-armoniche possono classificarsi in riguardo al numero delle omologie, nel modo seguente:

I. — *Una sola omologia:*

$$a x_3^4 + b x_3^2 + c = 0,$$

dove a, b, c sono binarie in $x_1 x_2$ dei gradi 0, 2, 4 rispettivamente. Il centro è (0 0 1), l'asse è $x_3 = 0$ e l'omologia è

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & -x_3 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_1 & -x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & x_2 & x_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & -x_2 & x_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & -x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & -x_2 & x_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Il fascio può essere individuato da un quadrilatero e dalla sua conica dei 14 punti.

VII. — *Quindici omologie: ossia le precedenti e altre sei di cui i centri sono i punti d'incontro dei lati del trilatero diagonale con la conica dei quattordici punti e assi le tangenti alla conica in questi punti in guisa che due di questi nuovi centri situati su di un medesimo lato del triangolo fondamentale giacciono l'uno sull'asse dell'altro. In altre parole questi sei nuovi centri sono i vertici dell'esa-esagono che il quadrilatero suddetto individua* (*).

Questo caso proviene da quello del n° V quando i lati $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ si trovano nelle medesime condizioni ivi descritte per $x_3 = 0$. L'equazione è

$$\sum x_i^4 = 0,$$

cioè è il caso della quartica dotata di tessuto apolare.

Le omologie sono le 9 del n° VI e le altre sei:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_2 & x_1 & ix_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & -x_1 & ix_3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ -x_3 & ix_2 & x_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_3 & ix_2 & -x_1 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ ix_1 & -x_3 & x_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ ix_1 & x_3 & -x_2 \end{pmatrix}.$$

(*) Cioè compongono la figura dei 6 punti singolari in un piano singolare di una superficie di Kummer 6 volte tetraedroide (cfr. Segre: *Sur un cas particulier de la surface de Kummer*, Berichte über die Verh. der Königl. Gesellsch. der Wiss. zu Leipzig, 1884 e Ciani: *Alcune osservazioni sulle configurazioni di Kummer*, Giornale di Napoli, 1898).

VIII. — *Ventuno omologie e cioè quelle del* n° VI *e le altre dodici descritte alla fine del paragrafo precedente. I nuovi dodici centri si distribuiscono in tre quadrangoli aventi per triangolo diagonale il triangolo fondamentale.*

Questa notevole quartica costituisce la curva d'ordine minimo fra quelle che sono invarianti rispetto al noto G_{168} di collineazioni piane. Essa, come già dicemmo, fu incontrata la prima volta da Klein (loc. cit.) e dopo fu considerata e studiata sotto varii aspetti (n° 18). L'equazione nostra è

$$\sum x_i^4 + \frac{3}{2}\left(-1 \pm i\sqrt{7}\right)\sum x_i^2 x_k^2 = 0.$$

Al n° 18, ove il fascio

$$\sum x_i^4 + 6\lambda \sum x_i^2 x_k^2 = 0$$

è studiato con qualche dettaglio, mostreremo come si possa pervenire, anche per altra via, alla equazione precedentemente trovata della quartica di Klein.

Osservammo già (n° 1) che il centro di una omologia armonica trasformante in sè la quartica deve essere necessariamente un punto doppio della Steineriana.

Ebbene l'ultimo esempio ora esposto ci prova che tutti i 21 punti doppi della Steineriana possono essere centri di omologie armoniche trasformanti in sè la curva (*).

Alcune proprietà relative ai flessi delle curve trovate.

14. Cominciamo dal caso II:

$$a x_1^4 + b x_2^4 + c x_3^4 + d x_1^2 x_2^2 + e x_2^2 x_3^2 + f x_1^2 x_3^2 = 0.$$

(*) I casi dei ni III e IV furono da me già segnalati nella mia tesi di laurea cfr. *Le linee diametrali delle curve algebriche piane* stampata negli Annali della R. Scuola Normale superiore di Pisa nell'89): non però gli altri casi perchè nella memoria suddetta mi proposi soltanto di considerare le possibili simmetrie di una curva rispetto ad assi *reali* passanti per uno stesso punto.

Una delle tre omologie è il prodotto delle altre due: cioè se al punto A corrispondono B, C, D nelle tre omologie, il gruppo $ABCD$ si muta in sè per opera di ognuna delle tre omologie medesime. Allora si consideri la rete di coniche

$$\alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \gamma x_3^2 = 0$$

che ha il triangolo fondamentale come triangolo autopolare.

Ogni conica della rete è mutata in sè dalle tre omologie in parola, dunque quella di esse che passa per due flessi non corrispondenti in alcuna delle tre omologie suddette taglierà la quartica in 8 flessi distribuiti in due gruppi come $ABCD$. Dunque:

I 24 flessi si trovano a 8, a 8 sopra 15 coniche di una stessa rete (*).

15. Andiamo al n° III

$$ax_3^4 + bx_3^2 x_1 x_2 + cx_3(x_1^3 + x_2^3) + dx_1^2 x_2^2 = 0.$$

Ogni conica che passa per i punti di contatto di $x_3 = 0$ e in quei punti tocca le rette che vànno al punto di concorso degli assi è mutata in sè dalle 3 omologie della curva. Tali coniche formano un fascio. Ciascuna taglia la curva (oltre che nei due punti suddetti) in 6 punti che sono vertici di un triesagono. Cioè essi compongono la figura dei 6 punti singolari in un piano singolare di una superficie di Kummer tre volte tetraedroide. Dunque:

Nella quartica si possono iscrivere ∞^1 triesagoni.

Se un vertice di un tale triesagono è un flesso, lo sono tutti. Ossia:

I 24 flessi compongono 4 triesagoni.

E anche:

I 24 flessi giacciono a 6, a 6 sopra 4 coniche appartenenti a uno stesso fascio.

(*) Gerbaldi: *L'equazione di 24° ordine da cui dipende la ricerca dei flessi della quartica piana* (Questi Rendiconti, 1893). Ciani: *Sopra le serie quadratiche di coniche inviluppanti la quartica piana* (Rendiconti Istituto Lombardo, 1895).

16. Per il caso del n° IV osserviamo che la quartica:

$$a(x_1^4 + x_2^4) + b x_1^2 x_2^2 + c x_3^2 (x_1^2 + x_2^2) + d x_3^4 = 0$$

ammette oltre il triangolo fondamentale $x_1 x_2 x_3 = 0$ (di cui ogni vertice e il lato opposto individuano una delle omologie armoniche che la curva possiede), anche il triangolo $(x_1 + x_2)(x_1 + x_2) x_3 = 0$ in uguali condizioni del 1°: quindi quello che fu detto per il primo al n° 14 può ripetersi quì. Cioè esistono due reti di coniche analoghe a quelle descritte in tal numero. Ma esse hanno un fascio comune e precisamente quello costituito dalle coniche passanti per quei due punti di $x_3 = 0$ che compongono la coppia del covariante sestico diversa dai centri e che toccano ivi le rette che vanno al punto comune agli assi. Ciascuna conica del fascio è trasformata in sè da tutte le omologie della quartica e quindi nel fascio vi saranno tre coniche passanti ognuna per 8 flessi: e per conseguenza il numero delle coniche contenenti 8 flessi e date dalle considerazioni del n° 14 applicate ai due triangoli suddetti deve esser diminuito di tre unità.

I 24 flessi si trovano a 8, a 8 sopra 27 coniche.

17. Nel caso del n° V si hanno 3 reti di coniche analoghe alle due precedenti e si vede subito che tali reti hanno a comune a due, a due un fascio nel quale esistono 3 coniche contenenti 8 flessi. Sicchè in questo caso:

I 24 flessi stanno a 8, a 8 sopra $3.15 - 3.3 = 36$ *coniche.*

18. Andiamo finalmente allo studio del fascio

$$\sum x_i^4 + 6\lambda \sum x_i^2 x_k^2 = 0.$$

Prima di tutto noteremo che le considerazioni dei n^i precedenti applicate a questo caso ci dicono che:

I 24 flessi di ogni curva del fascio giacciono a 6, a 6 sopra 16 coniche e a 8, a 8 sopra altre 51 coniche.

Per determinare nel fascio le due quartiche di Klein che vi sono contenute si può anche procedere nel modo seguente. Si osservi prima

di tutto che il covariante S di una curva del fascio appartiene nuovamente al fascio; e precisamente se con λ' s'indica il valore del parametro che individua il covariante S della quartica corrispondente al valore λ, si ha

$$\lambda' = \frac{\lambda^2 - 2\lambda^3 - \lambda^4}{6\lambda^4}.$$

Segue intanto che:

L'unica quartica del fascio che abbia S indeterminato è $\sum x_i^4 = 0$.

Escludendo il valore zero di λ rimane

$$\lambda' = \frac{1 - 2\lambda - \lambda^2}{2\lambda^2}.$$

Dato λ si trova un sol valore per λ': viceversa per un valore di λ' ci sono due valori per λ. Dunque:

Ogni curva del fascio può considerarsi come covariante S di altre due curve del fascio medesimo.

Per $\lambda' = \lambda$ si troveranno le curve del fascio che coincidono con i loro covarianti S. Ora appunto il Brioschi ha dimostrato (*) che la quartica di Klein coincide col proprio covariante S (**). Dunque le 2 quartiche di Klein del fascio saranno da scegliersi fra quelle per cui si ha:

$$\lambda = \frac{1 - 2\lambda - \lambda^2}{6\lambda^2},$$

cioè:

$$6\lambda^3 + \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0.$$

Questa è soddisfatta per i valori

$$\frac{1}{3}, \quad \frac{-1 + i\sqrt{7}}{4}, \quad \frac{-1 - i\sqrt{7}}{4},$$

(*) Brioschi, *Sopra una classe di curve del 4° ordine* (Atti R. Accademia dei Lincei: s. III, v. VIII). Veggasi pure per altre particolarità della quartica di Klein: Klein-Fricke, *Vorlesungen über die Theorie der Elliptischen Modulfunctionen,* v. I, pag. 692; Weber, *Lehrbuch der Algebra,* B. II, § 115 (*Ternäre lineare substitutionsgruppe vom* 168sten *Grade*).

(**) Viceversa si può dimostrare che se una quartica piana irriduttibile coincide col proprio covariante S, essa è necessariamente la quartica di Klein.

ma il primo lo escludiamo perchè dà la conica doppia $(\sum x_i^2)^2 = 0$: gli altri daranno le curve domandate: il che conferma i risultati del n° 12. Da essi si deducono facilmente le più salienti proprietà della configurazione dei centri, degli assi, delle bitangenti della quartica di Klein. Così ad es. si vede che i centri e gli assi compongono una configurazione $(21_4, 21_4)$, che i centri e le bitangenti compongono un'altra configurazione $(21_4, 28_3)$, ecc.

Altre curve notevoli del fascio in questione, oltre la conica doppia $\left(\lambda = \frac{1}{3}\right)$ e il quadrilatero fondamentale $\left(\lambda = -\frac{1}{3}\right)$, si hanno per $\lambda = \infty$, $\lambda = 0$.

Per $\lambda = \infty$ si ottiene la $\sum x_i^2 x_k^2 = 0$ che è l'unica quartica irriduttibile del fascio dotata di punti doppi. Per $\lambda = 0$ si ha la $\sum x_i^4 = 0$ di cui già parlammo al n° VII. Essa non possiede 24 flessi distinti, ma 12 punti di ondulazione sicchè *il dodecagono formato con i punti suddetti è mutato in sè dalle 15 omologie armoniche che la curva possiede.*

Le sei omologie che la quartica gode (oltre le 9 comuni a tutte le curve del fascio) hanno i centri sui vertici dell'esa-esagono segnato sui lati del triangolo fondamentale dalla conica dei 14 punti. Applicando una di queste omologie a tale esa-esagono risulta che *due vertici di esso situati su di uno stesso lato del triangolo fondamentale insieme ai* 4 *vertici del quadrilatero fondamentale che giacciono fuori di quel lato compongono un nuovo esa-esagono* (*).

EDGARDO CIANI.

(*) Per la configurazione degli assi e centri delle omologie del fascio

$$\sum x_i^4 + 6\lambda \sum x_i^2 x_k^2 = 0$$

veggasi anche: Gerbaldi, *Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane* (questi Rendiconti, 1898-99). Relativamente poi alla quartica $\sum x_i^4 = 0$ citeremo anche Walther-Dyck che considera il gruppo delle 96 omografie che la trasformano in sè stessa, ma non quelle di esse che sono omologie armoniche: cfr. *Nötiz über eine reguläre Riemann Fläche vom Geschlechte drei und Zugehorige Normal Curve vierter Ordnung* (Mathematische Annalen, Bd. 17).

ESTRATTI DAI VERBALI

[*Vedi* t. XII, pp. 307-311].

Per le pubblicazioni ricevute in dono e presentate nelle varie Adunanze, veggasi la Seconda Parte (Biblioteca Matematica) del t. XIII.

ADUNANZA DEL 24 LUGLIO 1898. (Presidenza F. Caldarera).

Il Circolo delibera di ringraziare il Sindaco, Comm. M. Amato-Pojero, ed il Consiglio Comunale di Palermo, pel sussidio di L. 500 accordato alla Società pel 1898, a titolo d'incoraggiamento alla pubblicazione dei Rendiconti.

Memorie e Comunicazioni.

GORDAN: *Auszug aus einem Schreiben an Herrn L. Berzolari.*

ADUNANZA DEL 14 AGOSTO 1898. (Presidenza F. Caldarera).

Ammissioni di nuovi soci. — Dietro votazione a schede segrete, il Professore Pietro Cassani (proposto dai soci Guccia e Gerbaldi) è eletto *socio non residente.*

Memorie e Comunicazioni.

DE FRANCHIS: *Riduzione dei fasci di curve piane di genere* 2.

ADUNANZA DEL 28 AGOSTO 1898. (Presidenza F. Caldarera).

Affari interni.

ADUNANZA DEL 13 NOVEMBRE 1898. (Presidenza G. B. Guccia).

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazione a schede segrete, il Dr. Ermenegildo Daniele (Torino) (proposto dai soci Volterra e Guccia) è eletto *socio non residente.*

Memorie e Comunicazioni.

DANIELE: *Sull'equilibrio delle reti.*

VIVANTI: *Sugli aggregati perfetti.*

PIZZETTI: *Nuova dimostrazione di taluni teoremi relativi alle funzioni sferiche contenuti in una Nota del prof. Paci.* (Da una Lettera al prof. Paci).

DE FRANCHIS: *Riduzione dei sistemi lineari* ∞^k *di curve piane di genere* 3, *per* $k > 1$.

ADUNANZA DEL 27 NOVEMBRE 1898. (Presidenza F. Caldarera).

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazione a schede segrete, il professore Filippo Angelitti (Palermo) (proposto dai soci Caldarera e Guccia) è eletto *socio residente.*

Memorie e Comunicazioni.

ALAGNA: *Delle congruenze binomie rispetto ad un modulo primo p o ad una*

potenza di esso, nel caso in cui $\frac{p-1}{2}$ *sia un numero primo, ovvero il doppio d'un numero primo.*

DE FRANCHIS: *Riduzione dei sistemi lineari* ∞^k *di curve piane di genere* 3, *per* $k > 1$. (Continuazione e fine).

ADUNANZA DELL'11 DICEMBRE 1898. (Presidenza G. B. Guccia).

Memorie e Comunicazioni.

GEGENBAUER: *Generalizzazione di alcuni teoremi intorno alle funzioni sferiche contenuti in una Nota del prof. Paci.* (Da una lettera al prof. Paci).

ALAGNA: *Delle congruenze binomie rispetto ad un modulo primo p o ad una potenza di esso, nel caso in cui* $\frac{p-1}{2}$ *sia un numero primo, ovvero il doppio d'un numero primo.* (Continuazione e fine).

ADUNANZA DEL 25 DICEMBRE 1898. (Presidenza F. Gerbaldi).

Memorie e Comunizioni.

ENRIQUES: *Una proprietà delle serie continue di curve appartenenti ad una superficie algebrica regolare.*

ADUNANZA DELL'8 GENNAJO 1899. (Presidenza G. B. Guccia).

Affari interni.

ADUNANZA STRAORDINARIA DEL 15 GENNAJO 1899. (Presidenza F. Caldarera).

Il Presidente dà il triste annuncio della morte del socio residente prof. commendatore Enrico Fileti, avvenuta in Palermo il giorno 1° gennajo corrente. Su proposta del socio Pepoli, alla quale si associa il Presidente, il Circolo delibera di esprimere alla famiglia del compianto collega le condoglianze della Società.

Corrispondenza. — I signori Bassani, Bettazzi, Cassarà, Mattina, Salemi-Pace, Sforza, Spanò, Spelta, si dimettono da soci del Circolo.

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazioni a schede segrete, i signori: Dr. Gaetano Fazzari (Palermo) (proposto dai soci Certo e Gerbaldi) ed Ing. Ester Paolo Guerra (Palermo) (proposto dai soci Agnello e Guccia), sono eletti *soci residenti;* ed i signori: Dr. Modestino Del Giudice (Napoli) (proposto dai soci Montesano e Guccia), prof. Edgard O. Lovett (Princeton, New Jersey, U. S. A.) (proposto dai soci Guccia e Gerbaldi) e Dr. Giovanni Vacca (Torino) (proposto dai soci Peano e Gerbaldi), sono eletti *soci non residenti.*

Memorie e Comunicazioni.

LOVETT: *Note on the contact Transformations of developable Surfaces.*

Bilanci. — Esposizione ed approvazione del Conto consuntivo dell'esercizio 1898, reso dal Tesoriere, e del Bilancio di previsione per l'esercizio 1899.

Affari interni. — Dietro discussione rimane approvato (a' sensi dell'Art. 38 dello Statuto) il seguente:

REGOLAMENTO SPECIALE PER LA BIBLIOTECA

Art. 1. — La Biblioteca del Circolo Matematico è aperta a tutti i soci per 15 ore settimanali.

Al principio di ogni semestre l'ufficio di Presidenza farà conoscere la distribuzione di detto orario.

Se per casi di forza maggiore sia indispensabile ridurlo o sospenderlo temporaneamente, l'Ufficio di Presidenza avrà cura di avvisarlo con circolare ai soci, provvedendo d'altronde sollecitamente a rimuovere le cause, che hanno prodotto il provvedimento eccezionale.

Art. 2. — Alla Direzione della Biblioteca è preposto un impiegato retribuito avente il titolo di Direttore della Biblioteca, la cui nomina ed eventuale successiva conferma è devoluta all'Ufficio di Presidenza, dal quale detto Direttore dipenderà.

Egli avrà in consegna tutti i libri, ed eserciterà le mansioni finora affidate ai due Bibliotecari, menzionati nell'art. 14 dello Statuto, cioè l'ordinamento della Biblioteca, la corrispondenza per gli scambi, la vigilanza della sala di lettura, la pratica dei prestiti, etc., e inoltre curerà acciocchè il presente regolamento abbia piena ed intera esecuzione da parte di tutti i soci, senza eccezione alcuna.

Ai due predetti Bibliotecari resta riservato lo studiare le proposte pel miglior funzionamento, e l'ulteriore sviluppo della Biblioteca, e il riferirne all'Ufficio di Presidenza, che collegialmente delibererà.

La carica di Direttore della Biblioteca non è cumulabile con nessuna di quelle, di cui al predetto art. 14 dello Statuto.

Art. 3. — Ai soci residenti è accordato il prestito a domicilio dei libri della Biblioteca sotto le seguenti norme e condizioni.

Art. 4. — Qualunque socio residente per acquistare il diritto al prestito a domicilio, oltre ad aver soddisfatto agli obblighi derivanti dall'art. 7 dello Statuto, deve depositare presso il Tesoriere del Circolo la somma di Lire Venticinque.

Art. 5. — Esibendo al Direttore la quietanza del deposito, il socio, nel ritirare personalmente nel locale della Biblioteca le pubblicazioni richieste, rilascerà una ricevuta, in cui, oltre tutte le indicazioni bibliografiche, sarà notato, se cattivo, lo stato di conservazione dello stampato, e della rilegatura; e nella quale il ricevente dichiarerà che conosce e si impegna ad osservare le presenti norme.

Art. 6. — Sono esclusi dal prestito:

a) i fascicoli di pubblicazioni periodiche appartenenti al volume in corso;

b) le pubblicazioni, di qualunque genere, arrivate da meno d'un mese;

c) i dizionari;

d) gli opuscoli, i libri, e i volumi di pubblicazioni periodiche, che avessero acquistato carattere di rarità;

e) le opere didattiche;

f) le pubblicazioni, che occorressero all'ufficio di redazione dei Rendiconti.

L'elenco delle pubblicazioni indicate negli alinea *d)*, *e)*, *f)* sarà formato dall'Ufficio di Presidenza ed esposto nella sala di lettura.

Art. 7. — Gli opuscoli separati potranno prestarsi in numero non maggiore di cinque, e per un tempo, che non supera un mese.

Art. 8. — Le memorie rilegate in volume e i volumi di pubblicazioni periodiche potranno essere imprestati a non più di un volume per volta, e la durata del prestito non potrà superare una settimana.

Art. 9. — I rimanenti libri potranno essere prestati a non più di due volumi per volta, e per un tempo non superiore ai quindici giorni.

Art. 10. — Non possono ottenersi più prestiti contemporaneamente, nè un prestito composto di libri appartenenti a categorie diverse fra quelle indicate negli articoli 7, 8 e 9; nè può ottenersi nuovo prestito, se non si sono restituite le pubblicazioni precedentemente prese.

Art. 11. — Pel 15 ottobre di ogni anno tutte le pubblicazioni in prestito debbono ritornare in Biblioteca; e durante la seconda quindicina di detto mese è sospeso qualunque prestito.

Art. 12. — La restituzione dei libri dovrà essere fatta dal socio nel locale della Biblioteca, e il deposito potrà essere ritirato da lui un giorno dopo che egli abbia restituite le pubblicazioni nell'identico stato di conservazione, nel quale le ha ricevute, o potrà da lui essere lasciato in garentia di futuri prestiti.

Art. 13. — Qualora il socio alla scadenza non abbia restituiti gli opuscoli o i volumi presi in prestito, gli sarà spedito dal Direttore della Biblioteca un avviso, in lettera raccomandata, che gli ricordi l'obbligo assunto della restituzione dentro il termine assegnato.

Se, dopo cinque giorni dalla spedizione dell'avviso, il socio non avrà mantenuto il suo impegno, si notificherà, mediante affissione nella sala di lettura, che egli è incorso nella perdita delle 25 lire, le quali resteranno proprietà del Circolo, salvo a questo ogni ulteriore azione ai termini di legge.

La sola decorrenza del tempo suindicato conduce alla perdita delle 25 lire. Il socio, nel ricevere il prestito, implicitamente rinunzia ad ogni eccezione di mancanza di avviso.

Art. 14. — Incorrerà pure nella perdita del deposito (totale o parziale a giudizio della Presidenza) chi restituirà le pubblicazioni in peggiorato stato di conservazione.

Art. 15. — Il socio, che sarà incorso nelle penalità dell'Art. 13, non sarà più ammesso al prestito, quand'anche offra di rinnovare il deposito.

Art. 16. — Tutte le spese di posta, cui darà occasione il prestito, saranno a carico del socio.

Art. 17. — Sarà cura della Presidenza di riparare, mediante i depositi incamerati, alle perdite o ai danni subìti dalla Biblioteca.

Art. 18. — I soci non residenti di passaggio a Palermo, durante la loro permanenza in questa città, sono equiparati, pel prestito dei libri, ai soci residenti.

Articolo transitorio. — I soci, che avessero preso in prestito libri antecedentemente al presente regolamento, non saranno ammessi al prestito, se non dopo

che avranno ottemperato all'invito di restituzione contenuto nella circolare del 6 gennajo 1899.

ADUNANZA DEL 22 GENNAJO 1899. (Presidenza F. Caldarera).

Corrispondenza. — Con lettera del 18 gennajo 1899 il sig. Dr. G. D. D'Arone si dimette da socio del Circolo

Affari interni.

Il PRESIDENTE comunica ai soci che l'UFFICIO DI PRESIDENZA, nella seduta del 20 gennaio corr. ed ai sensi degli art. 1 e 2 del *Regolamento speciale per la Biblioteca*: 1° ha nominato il Dr. Euplio Conoscente direttore della Biblioteca pel 1899; 2° ha stabilito che pel corrente semestre invernale (a tutto aprile 1899) la Biblioteca sarà aperta ai soci nei giorni di lunedì, martedì, mercoledì, venerdì e sabato dalle ore 14 alle ore 17.

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazione a schede segrete, il signor prof Alessandro Vassilief (Kasan) (proposto dai soci Guccia e Gerbaldi) è eletto *socio non residente.*

Memorie e Comunicazioni.

GERBALDI: *Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane.* (Continuazione).

ADUNANZA DEL 12 FEBBRAJO 1899 (Presidenza G. Fazzari).

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazioni a schede segrete, i signori: Dr. Michele Morale (Bagni Canicattini) (proposto dai soci Guccia e Conoscente) e prof. K. A. Barack, direttore della Biblioteca della Imperiale Università di Strassburg (proposto dai soci Guccia e Gerbaldi) sono eletti *soci non residenti.*

Memorie e Comunicazioni.

GERBALDI: *Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane.* (Continuazione).

DE FRANCHIS: *Sulle reti sovrabbondanti di curve piane di genere 2.*

STUDNIČKA: *Sur la périodicité de la fonction* sin x *et* cos x. (Démonstration sans paroles).

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \tag{1}$$

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}, \tag{2}$$

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1, \quad (1), (2) \tag{3}$$

$$\cos^2 x - \sin^2 x = \frac{e^{2ix} + e^{-2ix}}{2} = \cos 2x, \quad (1), (2) \tag{4}$$

$$2 \sin x \cos x = \frac{e^{2ix} - e^{-2ix}}{2i} = \sin 2x, \quad (1), (2) \tag{5}$$

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad (1), (2) \tag{6}$$

$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y. \quad (1), (2) \tag{7}$$

$$\cos \alpha = \sin \alpha = \frac{1}{2}\sqrt{2}, \quad (3) \tag{8}$$

$$\cos 2\alpha = 0, \quad (7), (8) \tag{9}$$

$$\sin 2\alpha = 1, \quad (5), (8) \tag{10}$$

$$\cos 4\alpha = \cos^2 2\alpha - \sin^2 2\alpha = -1, \quad (4), (9), (10) \tag{11}$$

$$\sin 4\alpha = 2 \sin 2\alpha \cos 2\alpha = 0, \quad (5), (9), (10) \tag{12}$$

$$\cos 6\alpha = \cos 4\alpha \cos 2\alpha - \sin 4\alpha \sin 2\alpha = 0, \quad (6), (9), (12) \tag{13}$$

$$\sin 6\alpha = \sin 4\alpha \cos 2\alpha + \cos 4\alpha \sin 2\alpha = -1 \quad (7), (10), (11), (12) \tag{14}$$

$$\cos 8\alpha = \cos^2 4\alpha - \sin^2 4\alpha = 1, \quad (4), (11), (12) \tag{15}$$

$$\sin 8\alpha = 2 \sin 4\alpha \cos 4\alpha = 0, \quad (5), (11), (12) \tag{16}$$

$$\cos 10\alpha = \cos 8\alpha \cos 2\alpha - \sin 8\alpha \sin 2\alpha = 0, \quad (6), (9), (15), (16) \tag{17}$$

$$\sin 10\alpha = \sin 8\alpha \cos 2\alpha + \cos 8\alpha \sin 2\alpha = 1, \quad (7), (10), (15), (16) \tag{18}$$

x	0	2α	4α	6α	8α	10α	
$\cos x$	1	0	-1	0	1	0	...
$\sin x$	0	1	0	-1	0	1	...

$$\cos(8k\alpha + x) = \cos x, \quad (6) \tag{19}$$

$$\sin(8k\alpha + x) = \sin x, \quad (7) \tag{20}$$

$$f(kp + x) = f(x), \qquad (k = \pm 1, 2, 3, \ldots) \tag{21}$$

$$p = 8\alpha = 2\pi. \quad (8) \tag{22}$$

ADUNANZA DEL 26 FEBBRAJO 1899. (Presidenza F. Caldarera).

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazioni a schede segrete, la signorina Frances Hardcastle (Cambridge) (proposta dai soci Guccia e Conoscente) ed il sig. Dr. Carlo Bourlet (Paris) (proposto dai soci Appell e Guccia) sono eletti *soci non residenti.*

Memorie e Comunicazioni.

VIVANTI: *Sul concetto di derivata nella teoria elementare delle funzioni analitiche.*

GIUDICE: *Rettifica alla Memoria « Introduzione alle coordinate triangolari e tetraedriche »* [questi Rendiconti, t. XII (1898), pp. 278-306].

Il 2° membro della form. (12′), a pag. 284, deve ancor esser moltiplicato per il seno dell'angolo formato dalla retta dimezzante gli spigoli d_{12}, d_{34} con la giacitura determinata da questi spigoli. Si ottiene la (12), se s'esprime tutto negli spigoli: E così, come si riconosce ancor più prontamente considerando il prisma, che ha comune col tetraedro uno spigolo laterale e la base (vedi F. Giudice, Periodico di Matematica, 1899) trovasi pure che:

Il prodotto d'un tetraedro per un suo spigolo è $\frac{4}{3}$ del triangolo di lati uguali alle aree delle due faccie adiacenti a tale spigolo ed all'area del triangolo, che ha per lati il detto spigolo e l'opposto ed il doppio della distanza dei centri di altri due spigoli opposti.

ADUNANZA DEL 12 MARZO 1899. (Presidenza F. Caldarera).

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazioni a schede segrete, i signori: Prof. Olof Gyldén (Stockholm) (proposto dai soci Guccia e Conoscente) e

Dr. Emilio Almansi (Torino) (proposto dai soci Volterra e Guccia) sono eletti *soci non residenti.*

ADUNANZA DEL 26 MARZO 1899. (Presidenza F. Caldarera).

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazione a schede segrete, il signor Rodolfo Tagliarini (Palermo) (proposto dai soci Guccia e Gerbaldi) è eletto *socio residente.*

Memorie e Comunicazioni.

BOURLET: *Sur la détermination de la surface d'une piste de vélodrome.*

ALMANSI: *Sulla ricerca delle funzioni poli-armoniche in un'area piana semplicemente connessa per date condizioni al contorno.*

MORALE: *Involuzione di grado n e specie 1 in uno spazio a n — 1 dimensioni.*

POINCARÉ: *Complément à l'Analysis situs.*

ADUNANZA DEL 9 APRILE 1899. (Presidenza F. Caldarera).

Memorie e Comunicazioni.

PICARD: *Sur les systèmes linéaires de lignes tracées sur une surface algébrique.*

CIANI: *I varii tipi possibili di quartiche piane più volte omologico-armoniche.*

ADUNANZA DEL 23 APRILE 1899. (Presidenza F. Caldarera).

Affari interni.

ADUNANZA DEL 14 MAGGIO 1899. (Presidenza G. B. Guccia).

Affari interni. — Il PRESIDENTE comunica ai soci che l'UFFICIO DI PRESIDENZA, nella seduta del 7 maggio corr. ed ai sensi dell'art. 1 del *Regolamento speciale per la Biblioteca,* ha stabilito che pel semestre estivo maggio-ottobre 1899 la Biblioteca sarà aperta ai soci nei giorni di lunedì e venerdì dalle ore 15 alle ore 18, e nei giorni di martedì, giovedì e sabato dalle ore 9 alle ore 12.

Ammissione di nuovi soci. — Dietro votazioni a schede segrete, i signori: Dr. George E. Fisher (Philadelphia, Pa., U. S. A.) (proposto dai soci Gerbaldi e Conoscente) e Dr. Isaac J. Schwatt (Philadelphia, Pa., U. S. A.) (proposto dai soci Gerbaldi e Conoscente), sono eletti *soci non residenti.*

ADUNANZA del 28 MAGGIO 1899. (Presidenza G. B. Guccia).

Affari interni.

ADUNANZA DELL'11 GIUGNO 1899. (Presidenza F. Gerbaldi).

Affari interni.

ADUNANZA DEL 25 GIUGNO 1899. (Presidenza F. Gerbaldi).

Affari interni.

F. G. G. B. G.

Tomo XIII (1899)—Parte I^a: MEMORIE E COMUNICAZIONI.

INDICE

ESTRATTI DAI VERBALI

MEMORIE E COMUNICAZIONI (*)

(*) Il segno * è apposto alle Comunicazioni inserite nei verbali delle Adunanze.

INDICE GENERALE

Fine della Parte 1ª del Tomo XIII (1899).

Tipografia Matematica, 11, via Villareale, Palermo.

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

RENDICONTI

DEL

CIRCOLO MATEMATICO

DI PALERMO

TOMO XIII. — ANNO 1899.

PARTE SECONDA: BIBLIOTECA MATEMATICA.

PALERMO,
SEDE DELLA SOCIETÀ
28, via Ruggiero Settimo, 28

1899

BIBLIOTECA MATEMATICA.

PUBBLICAZIONI NON PERIODICHE

PERVENUTE IN DONO AL CIRCOLO.

XVI° Elenco: (marzo 1897-dicembre 1898).

[*Vedi* gli Elenchi precedenti: t. XI, pp. 83-92 e *retro*].

Amodeo, F. (Napoli). [*Vedi* t. XI, pag. 83]. A proposito dei postulati della geometria proiettiva. *Giornale di Battaglini*, XXXIV, 1896.

— Curve k-gonali di s^{esima} specie. *Atti Acc. Napoli*, IX_2, 1897.

— La prima data dell'Accademia Reale di Napoli. *Rend. Acc. Napoli*, 1898.

Amodeo, F. e **Croce, B.** Carlo Lauberg ed Annibale Giordano prima e dopo la rivoluzione del 1799. *Archivio Storico per le Provincie Napoletane*, XXIII, 1898.

Augustin, F. (Praga). Autografické zaznamy tlaku, teploty, směru a ryclosti větru *Rozpravy České Ak.*, V_2, 1896.

Bagnera, G. (Palermo). [*Vedi* t. XI, pag. 83]. Sopra i divisori normali d'indice primo di un gruppo finito. *Rend. Acc. Lincei*, VII_5, 1898.

Ball, S. Rob. (Cambridge). The twelfth and concluding memoir on the theory of screws. *Trans. of the Irish Ac.*, XXXI, 1898.

Ball, W. Rouse. (Cambridge). Récréations et problèmes mathématiques des temps anciens et modernes, traduits par F. Patrick. Paris, 1898.

Bendixson, I. (Stockolm). [*Vedi* t. XI, pag. 84]. Sur les points singuliers d'une équation différentielle linéaire. *Öfversigt af k. Vetenskaps-Ak. Förhandlingar*, 1895.

— Sur les équations différentielles linéaires à solutions périodiques. *Ibid.*, 1896.

Berzolari, L. (Torino). [*Vedi* t. XI, pag. 84]. Sugli invarianti differenziali projettivi delle curve d'un iperspazio. *Ann. di Matem.*, $XXVI_2$, 1897.

— Un'osservazione sull'estensione dei teoremi di Eulero e di Meusnier agli iperspazii. *Rend. Acc. Lincei*, VI_5, 1897.

— Sulle quinte forme [illegible] d'una forma binaria quadratica. *Rend. Circ. Matem.*, XII, 1898.

— Sulla curvatura delle varietà tracciate sopra una varietà qualunque. Nota I e Nota II. *Atti Ac. Torino*, XXXIII, 1898.

Bettazzi, R. (Torino). [*Vedi* t. XI, pag. 84]. Sulle serie a termini positivi le cui parti rappresentano un continuo. *Atti Ac. Torino*, XXXIII, 1897-98.

— Generalizzazione dei sistemi di numerazione. *Periodico di Matem.*, XIII, 1898.

Bianchi, L. (Pisa). [*Vedi* t. IX, pag. 1]. Sugli spazii a tre dimensioni che ammettono un gruppo di movimenti. *Memorie Soc. Italiana*, XI_3, 1897.

Borel, E. (Paris). Leçons sur la théorie des fonctions. Paris, 1898.

Brambilla, A. (Napoli). [*Vedi* t. XI, pag. 84]. Di taluni sistemi di quartiche gobbe razionali seganti ad una certa superficie cubica. Nota 1ª. *Rend. Ac. Napoli*, 1897.

— Sopra una particolare varietà del 3º ordine nello spazio a quattro dimensioni. *Atti Ac. Napoli*, 1897.

— Intorno alla superficie di Steiner. *Rend. Ac. Napoli*, 1898.

— Estensione di una proprietà della superficie di Steiner. *Ibid.*, 1898.

— I poligoni principali di una quartica gobba dotata di punto doppio. *Atti Ac. Napoli*, IX_2, 1898.

Brauner, B. (Prag). [*Vedi* t. XI, pag. 84]. Práce z chemického laboratoria C.K. University. *Rozpravy České Ak.*, V_2, 1896.

Brill, A. (Tübingen). [*Vedi* t. IX, pag. 2]. Ueber die Zerfällung einer Ternärform in Linearfactoren. *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Verein.*, V, 1897.

Brodén, T. (Lund). [*Vedi* t. X, pag. 2]. Ueber unendlich oft oscillirende Funktionen. *Öfversigt af k. Vetenskaps. Ak. Förhandlingar*, 1895.

— Ueber das Weierstrass-Cantor'sche Condensations-Verfahren. *Ibid.*, 1896.

Brun, F. de (Stockholm). [*Vedi* t. XI, pag. 84]. Till teorien för algebraiska funktioner. *Öfversigt af k. Vetenskaps. Ak. Förhandlingar*, 1896.

Bucca, F. (Palermo). Sullo sviluppo d'una funzione di variabile complessa, dotata di singolarità isolate, in serie colle caratteristiche separate. *Rend. Circ. Matem.*, XI, 1897.

— Sopra certi integrali e certi sviluppi in serie. *Ibid.*, XII, 1898.

Burali-Forti, C. (Torino). [*Vedi* t. XI, pag. 85]. Una questione sui numeri transfiniti. *Rend. Circ. Mat.*, XI, 1897.

— Exercices de traduction en symboles de logique mathématique. *Bull. de Math. Élém.*, (Niewenglowski), 1897.

— Lezioni di Aritmetica pratica. Torino, 1897.

— Note scientifiche e critiche alle lezioni di Aritmetica pratica. Torino, 1897.

— Introduction à la Géométrie différentielle suivant la méthode de H. Grassmann. Paris, 1897.

Burali-Forti, C. - Ramorino, A. (Torino). Elementi di Aritmetica razionale

(con 100 esercizi e problemi) ad uso della 3ª classe della Scuola Tecnica. Torino, 1898.

— Aritmetica e Norme per l'insegnamento nelle scuole elementari (con 585 esercizi e problemi) ad uso della Classe 2ª e 3ª delle Scuole Normali. Torino, 1898.

— Elementi di Algebra (con 446 problemi ed esercizi) ad uso della 1ª classe della Scuola Normale. Torino, 1898.

— Elementi di Algebra (con 570 problemi ed esercizi) ad uso della 3ª Classe della Scuola Tecnica. Torino, 1898.

Burgatti, P. (Roma). [*Vedi* t. XI, pag. 85]. Sulla trasformazione delle eqnazioni diffenziali del secondo ordine con due variabili indipendenti. *Rend. Acc. Lincei,* VII_5, 1898.

Capelli, A. (Napoli). [*Vedi* t. XI, pag. 85]. Saggio sulla introduzione dei numeri irrazionali col metodo delle classi contigue. *Giorn. di Battaglini,* XXXV, 1897.

— Sulle generatrici del gruppo simmetrico delle sostituzioni di *n* elementi. *Ibid.,* XXXV, 1897.

— Per la commemorazione di James Joseph Sylvester. *Rend. Acc. di Napoli,* 1897.

— Francesco Brischi. Cenno necrologico. *Giorn. di Battaglini,* XXXVI, 1898.

— Lezioni di Algebra complementare ad uso degli aspiranti alla licenza universitaria in Scienze fisiche e matematiche. Napoli, 1898.

— Sulla riduttibilità delle equazioni algebriche. Note 1ª, 2ª e 3ª. *Rend Acc. Napoli,* 1897 e 1898.

Carslaw, H. S. (Cambridge). On the Fluted Vibrations of a Circular Vortex ring with a Hollow Core. *Proceed. of the London Math. Soc.,* XXVIII, 1897.

Cassani, P. (Venezia). Sulla Geometria pura euclidiana ad *n* dimensioni. *Atti Istit. Veneto,* V_7, 1893-95.

— Sugli angoli degli spazî lineari in un ambiente a più dimensioni. *Ibid.,* VI_7, 1894-95.

— La definizione geometrica del numero primo. *Ibid.,* $VIII_7$, 1896-97.

— Sulla corrispondenza quadratica. *Ibid.,* IX_7, 1897-98.

Castelnuovo, G. (Roma). [*Vedi* t. XI, pag. 85]. Alcune proprietà fondamentali dei sistemi lineari di curve tracciati sopra una superficie algebrica. *Annali di Matematica.* XXV_2, 1897.

— Sul genere lineare di una superficie e sulla classificazione a cui esso dà luogo. *Rend. Acc. Lincei,* VI_5, 1897.

Darboux, G. (Paris). Leçons sur les systhèmes orthogonaux et les coordonnées curvilignes. Paris, 1898.

Delitala, G. (Sassari). [*Vedi* t. V, pag. 2]. Contributo allo studio del problema di Pothenot. *Atti Acc. Torino,* XXXIII, 1898.

Del Re, A. (Modena). [*Vedi* t. XI, pag. 86]. Sopra una congruenza omaloide del 3° grado. *Mem. Acc. Modena,* I_3, 1897.

— Ricerche geometriche diverse in relazione ai punti ed alle linee brillanti d'una superficie algebrica, considerata in una metrica generale dello spazio. *Atti. Acc. Modena,* XII, 1898.

Descartesa, R. Slavnost pořádaná na paramět třistaletých narozenin. Praze, 1897.

Drach, J. (Paris). Essai sur une théorie générale de l'intégration et sur la classification des transcendantes. Thèse de Doctorat. Paris, 1898.

Ekström, A. (Stockholm). Om teorien för elektriska svängningar i metalltrådar, framkallade af en H e r t z'oskillator. *Akademisk Afhandling, Upsala,* 1897.

Enriques, F. (Bologna). [*Vedi* t. XI, pag. 86]. Sulla irrazionalità da cui si può far dipendere la risoluzione d'un'equazione algebrica $f(x, y, z) = 0$ con funzioni razionali di due parametri. *Math. Annalen,* XLIX, 1897.

— Le superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)} = 2$. *Rend. Acc. Lincei,* VI_5, 1897.

— Sulle superficie algebriche di genere lineare $p^{(1)} = 3$. *Ibid.,* VI_5, 1897.

Fonvielle, W. de (Paris). Les Ballons-Sondes et les ascensions internationales, précédé d'une introduction par J. B o u q u e t d e l a G r y e. Paris, 1899.

Forsyth, A. (Cambridge). [*Vedi* t. XI, pag. 87]. Addres to the Mathematical and Physical Section. Toronto, 1897.

Fransén, A. E. (Stockholm). C o r i o l i s'sats, tillämpad i mjuka kroppars kinematik. *Öfversigt af k. Vetenskaps-Ak. Förhandlingar,* 1895.

— Några anmärkningar om differentialekvationen

$$y'' = Ay^3 + By^2 + Cy + D + (Ey + F)y'$$

och dermed analoga ekvationer. *Ibid.,* 1895.

— Bidrag till frågan om den rätta definitionen på derivator med komplexa indices. *Ibid.,* 1895.

— Ett specialfall af tre-kroppars-problemet: Två himlakroppar röra sig på lika stora afstånd från den tredje. *Ibid.,* 1895.

Fredholm, I. (Stockholm). [*Vedi* t. X, pag. 3]. Sur les équations de l'équilibre d'un corps solide élastique. *Akademisk Afhandling, Upsala,* (*Acta Mathem.,* XXIII) 1898.

Fričové, J. J. (Praga). Fotografie komety P e r r i n e Nov. 16, 1895. *Rozpravy České Ak.,* V_2, 1896.

— Kometa P e r r i n e po průchodu periheliem kometa 1896 (P e r r i n e-L a m p). *Ibid.,* V_2, 1896.

Galois, E. Oeuvres mathématiques de E. G a l o i s, publiées sous les auspices de la Société Mathématique de France, avec une introduction par E. P i c a r d. Paris, 1898.

Gazzaniga, P. (Padova). Libro di Aritmetica e di Algebra elementare. Padova, 1897.

Gentry, R. (New-York). On the forms of plane quartic curves. A dissertation. New-York, 1896.

Gerbaldi, F. (Palermo). [*Vedi* t. XI, pag. 87]. Sul gruppo semplice di 360 collineazioni piane. *Mathem. Annalen,* L, 1898.

Giudice, F. (Genova). [*Vedi* t. XI, pag. 87]. Nozioni sulle trasformazioni puntuali e sui gruppi continui. Brescia, 1898.

— Angoli di due rette e di due piani: perpendicolarità e parallelismo in coordinate omogenee. (litogr.)

— Sull'analisi indeterminata di 1° grado. *Giornale di Battaglini,* XXXVI, 1898.

Goettler, J. (München). Conforme Abbildung eines von concentrischen, gleichseitigen Hyperbeln oder gewissen Kurven n^{ter} Ordnung begrenzten Flächenstückes auf den Einheitskreis. Inaugural-Dissertation. München, 1897.

Goursat, E. (Paris). [*Vedi* t. XI, pag. 87]. Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. Tome II: La méthode de Laplace.—Les systémes en involutions.—La méthode de Darboux.—Les équations de la première classe.—Transformations des équations du second ordre.—Généralisations diverses. Paris, 1898.

Grönwall, H. (Upsala). Om system of lineära totala differentialekvationer. *Öfversigt af k. Vetenskaps-Ak. Förhandlingar,* 1895.

— Ueber Integrale algebraischer Differentialausdrücke von mehreren Veränderlichen. *Ibid.,* 1896.

— Några användningar af de 2 n-periodiska funktionerna på teoria för system af lineära totala differentialekvationer. *Ibid.,* 1896.

— Om system af linjära totala differentialekvationer särskildt sådana med 2 n-periodiska koefficienter. *Akademisk Afhandling, Upsala,* 1898.

Gruss, G. (Praga). [*Vedi* t. XI, pag. 87]. Základové theoretické astronomie. Praze, 1897.

Gyldén, H. (Stokholm). [*Vedi* t. X, pag. 3]. Traité analytique des Orbites absolues des huit Planètes principales. Tome I: Théorie générale des orbites absolues. Stockholm, 1893.

— Olika methoder att bestämma de horistiska termerna i den differentialeqvation, som förmedlar härledningen af ojemnheterna i en planets longitud I. *Öfversigt af k. Vetenskaps-Ak. Förhandlingar,* 1896.

Halsted, G. B. (Austin). [*Vedi* t. XI, pag. 87]. The introduction to L o b a t c h e v s c k y 's new elements of Geometry. (Translated from the Russian.) *Texas Academy of Science,* 1897.

Hesse, L. Gesammelte Werke. München, 1897.

Holmgren, E. (Upsala). Om differentialekvationen

$$\sum_{ik} A_{ik}(x, y) \frac{\partial^{i+k} z}{\partial x^i \partial y^k} = 0$$

$$\left(\begin{matrix} i = 0, 1, \ldots, p \\ k = 0, 1, \ldots, q \end{matrix} \quad p + q = n, \ p\, q \neq 0, \ A_{pq} = 1 \right).$$

Upsala Universitets Årsskrift 1897.

Holmqvist, B. (Lund). Ueber beziehungen zwischen binären und ternären Formensystemen. Inaug.—Dissertat. Lund, 1898.

Jacoli, F. (Venezia). Intorno ad un almanacco pubblicato nel 1549 dal celebre matematico bolognese L u d o v i c o F e r r a r i. *Annuario Astro-Meteorol. per l'anno* 1897.

Kiepert, L. (Hannover). [*Vedi* t. XI, pag. 88]. Grundriss der Differential-und Integral-Rechnung. I Theil: Differential-Rechnung. Hannover, 1897.

Klein, F. (Gottinga). [*Vedi* t. XI, pag. 88]. Zur ersten Verteilung des L o b a t s c h e w s k y-Preises. Göttingen, 1897.

— Conférences sur les mathématiques faites au Congrès de Mathém., tenu à l'occasion de l'Exposition de Chicago par F. K l e i n, recueillies par A. Z i w e t, et traduites par L. L a u g e l. Paris, 1898.

— Zur Frage des höheren mathematischen Unterrichts. *Verhandl. des ersten intern. Math.-Kongr., Zürich*, 1898.

— Ueber den Stand der Herausgabe von G a u s s' Werken. *Nachrichten der K. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen*, 1898.

Kobb, G. (Stockholm). [*Vedi* t. X, pag. 3]. Sur le calcul direct des solutions périodiques dans le problème de trois corps. *Öfversigt af k. Vetenskaps-Ak. Förhandlingar*, 1895.

Koch, H. von. (Stockholm). [*Vedi* t. XI, pag. 88]. Quelques théorèmes concernant la théorie générale des fractions continues. *Öfversigt af k. Vetenskaps-Ak. Förhandlingar*, 1895.

— Sur une classe d'équations aux dérivées partielles du second ordre à deux variables indépendantes. *Ibid.*, 1895.

Koláček, F. (Praga). [*Vedi* t. XI, pag. 18]. Theoretické úvahy o komplikovaných kmitech elektrických, zejména o pokusech geitlerových. *Rozpravy České Ak.*, V_2, 1896.

Kommerell, K. (Tübingen). Die Krümmung der zweidimensionalen Gebilde im ebenen Raum von vier Dimensionen. Inaugural-Dissertation. Tübingen, 1897.

Kovář, F. (Praga). I. Chemicky výzkum pěti moravských minerálů. II. O zajímavém fosforečnanu hlinitém z velkého tresneho u moravské olešnice. *Rozpravy České Ak.*, V_2, 1896.

— Rozbor titanového železa ze Stěpanovky v rusku. *Ibid.*, V_2, 1896.

Küpper, K. (Praga). [*Vedi* t. VII, pag. 5]. O jistem základním problemu v projektioné geometrii. *Rozpravy České Ak.*, VI_2, 1897.

Laguerre. Oeuvres scientifiques, pubbliées sous les auspices de l'Académie des Sciences par C. H e r m i t e, H. P o i n c a r é et E. R o u c h é. Tome I. Paris, 1898.

Laisant, C.-A. (Paris). [*Vedi* t. XI, pag. 88]. La Mathématique. Philosophie-Enseignement. Paris, 1898.

Lampe, E. (Berlin). [*Vedi* t. VIII, pag. 5]. «K a r l W e j e s t r a s s». Gedächtnissrede. Leipzig, 1897.

Láska, V. (Praga). [*Vedi* t. X, pag. 10]. Vyšší geodesie. *České Ak. Cis. Frant. Joseph*, II, 1896.

Lazzeri, G. (Livorno). [*Vedi* t. X, pag. 10]. Sopra un problema di strategia marittima. *Riv. Maritt., 1897.*

Lejeune Dirichlet, G. [*Vedi* t. IV, pag. 9]. Werke. Zweiter Band. Berlin, 1897.

Lemoine, É. (Paris). [*Vedi* t. X, pag. 10]. Note sur une construction approchée du dévéloppement de la circonférence et remarques diverses. *Bullet. de la Soc. Math. de France,* XXIII, 1895.

— Mélanges sur la géométrie du triangle. *Association Française. Congrès de Bordeaux,* 1895.

— Questions rélatives à la géométrie du triangle, à la géométrographie et à la transformation continue. *Ibid. Congrès de Carthage,* 1896.

Lerch, M. (Praga). [*Vedi* t. XI, pag. 88]. Různé výsledky v theorii Funkce Gamma. *Rozpravy České Ak.,* V_2, 1896.

— O jisté arithmetické větě Zolotareva. *Ibid.,* V_2, 1896.

— O jistem druhu semikonvergentních rozvojů. *Ibid.* V_2, 1896.

— Uvahy z počtu integrálniho. *Ibid.,* V_2, 1896.

— O Abelovské transformaci trigonometrických řad. *Ibid.,* V_2, 1896.

Levy, L. (Paris). Précis élémentaire de la théorie des fonctions elliptiques avec tables numériques et applications. Paris, 1898.

Lévy, M. (Paris). Leçons sur la théorie des marées, professées au Collège de France. (1ère partie). Paris, 1898.

Lindelöf, L. (Helsingfors). [*Vedi* t. III, pag. 17]. Propriétés générales des polyèdres qui, sous une étendue superficielle donnée, renferment le plus grand volume. *Mélanges Math. tirés du Bull. Ac. St.-Pétersbourg,* IV, 1898.

— Recherches sur les polyèdres maxima. *Acta Societatis Scientiarum Fennicæ,* XXIV, 1898.

Longchamps, G. de. (Paris). [*Vedi* t. IX, pag. 4]. L'école polytecnique à propos des récents programmes. *Journ. de Mathém. spéc.,* 1897.

Lorenz, L. [*Vedi* t. XI, pag. 88]. Oeuvres scientifiques, revues et annotées par H. Valentiner. Copenhague, 1898.

Loria, G. (Genova). [*Vedi* t. XI, pag. 88]. Integrali euleriani e spirali sinusoidi *Věstnik Kral. České Společn. Nàuk.,* 1897.

— Sopra una classe notevole di alternanti d'ordine qualsivoglia. *Ibid.,* 1897.

— Aperçu sur le développement historique de la théorie des courbes planes. *Verhandl. des ersten intern. Math.-Kongr., Zürich,* 1897.

Maddison, I. (Bryn Mawr). On singular solutions of differential equations of the first order in two variables. *Quarterly Journal of Mathem.,* XXVIII, 1896.

Majlert, H. Éssai sur les éléments de la Mécaniques des particules. 1ère Partie. Paris, 1897.

Malmborg, M. (Upsala). Om integrationen af en klass af lineära differentialeqvationer med dubbelperiodiska koefficienter, analog med de S. K. Hermite' ska differentialeqvationerna. *Upsala Universitets Årsskrift* 1897.

Mannheim, A. (Paris). [*Vedi* t. V, pag. 5]. Sur le paraboloïde des huit droites et les nappes de développées des surfaces. *Comptes Rendus,* CXXIII, 1896.

Martin, Art. (Washington). About cube numbers whose sum is a cube number. *The Math. Magaz.*, 1895.
— Notes about square numbers whose sum is either a square of the sum of either squares. *Ibid.*, 1895.
— A method of finding, without tables, the number corresponding to a given logarithm. *Ibid.*, 1895.
— Formulas for the sides of razional plane triangles. *Ibid.*, 1895.
— About square numbers whose sum is a square number. *Ibid.*, 1895.
— About biquadrate numbers whose sum is a biquadrate. *Ibid.*, 1896.
— Solutions of Problems. *The Mathem. Visitor.*, II, 1894.

Martinetti, V. (Messina). [*Vedi* t. XI, pag. 88]. Le configurazioni (8_4, 8_4) di punti e piani. *Giorn. di Battaglini*, XXXIV., 1896.
— Sopra la configurazione di Kummer. *Ibid.*, XXXV, 1897.

Mascari, A. (Catania). [*Vedi* t. XI, pag. 88]. Protuberanze solari osservate nel R. Osservatorio di Catania nell'anno 1896. *Mem. Soc. Spettroscopisti Ital.*, XXVI, 1897.
— Sulla frequenza e distribuzione in latitudine delle macchie solari osservate all'Osservatorio di Catania nel 1896. *Ibid.*, XXVI, 1897.

Masoni, U. (Napoli). [*Vedi* t. IX, pag. 5]. Sulla espressione approssimativa del coefficiente di attrito interno nei tubi di condotta. *Atti Ist. Incoragg. Napoli*, X, 1897.
— Alcune osservazioni sui valori della quantità di moto e della forza viva di una corrente in una tubolatura. *Ibid.*, XI, 1898.

Maupin, G. (Paris). La Mathématique. Opinions et curiosités. XVI, XVII, XVIII siècles. Paris, 1898.

Max, B. (Stuttgart). Ueber lineare Scharen von Kurven und Flächen. Inaugural-Dissertation. Tübingen, 1897.

Mayer, A. (Leipzig). [*Vedi* t. XI, pag. 88]. Ueber die lebendige Kraft der durch plötzliche Stösse in einem System materieller Punkte erzeugten Geschwindigkeitsänderungen. *Berichte Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissensch., Leipzig*, 1898.

Meray, Ch. (Dijon). [*Vedi* t. XI, pag. 89]. Leçons nouvelles sur l'analyse infinitésimale et ses applications géométriques — Quatrième Partie: Applications géométriques classiques. Paris, 1898.

Nédéleo, G. Le calcul vectoriel et ses applications en géométrie et en mécanique. Premier Volume. Paris, 1897.

Novák, V. (Praga). Galvanická polarisage platinovych elektrod v roztoku dusičnanu stříbrnatého. *Rozpravy České Ak.*, V_2, 1896.

Paternò, F. P. (Palermo). [*Vedi* t. V, pag. 6]. Sopra un notevole sistema isogonico di proiezioni parallele. *Atti del Collegio degli Ing. ed Arch. di Palermo*, 1897.
— Un teorema sull'approssimazione delle radici quadrate. *Periodico di Matem.*, XIII, 1898.

Pennacchietti, G. (Catania). [*Vedi* t. IX, pag. 6]. «Giuseppe Zurria» *Bollett. Acc. Gioenia di Catania*, 1897.

Petr, K. (Praga). O počtu reálných kořenů rovnice algebraické v mezích daných. *Rozpravy České Ak.*, VI_2, 1897.

— O seminvariantech. *Ibid.*, VI_2, 1897.

Phragmén, E. (Stockholm). [*Vedi* t. X, pag. 4]. Sur la théorie des élections multiples. *Öfversigt af k. Vetenskaps-Ak. Förhandlingar*, 1896.

Picard, E. et Simart, G. (Paris). Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes. Tome I. Paris, 1897.

Pieri, M. (Torino). [*Vedi* t. XI, pag. 89]. Sugli enti primitivi della Geometria projettiva astratta. *Atti Acc. Torino*, XXXII, 1897.

— I principii della Geometria di posizione composti in sistema logico deduttivo. *Mem. Acc. Torino*, $XLVIII_2$, 1898.

— Nuovo modo di svolgere deduttivamente la Geometria Projettiva. *Rend. Ist. Lombardo*, $XXXI_2$, 1898.

Plescot, A. (Plzni). [*Vedi* t. X, pag. 12]. Příspěvky k theorii eliminace. *Rozpravy České Ak.*, V_2, 1896.

Procházka, B. (Praga). [*Vedi* t. XI, pag. 89]. Příspěvek k užití kinematiky v geometii novější a deskriptivni. *Rozpravy České Ak.*, V_2, 1896.

— Příspěvek ke strojení oskulačních hyperboloidů ku plocham zborceným *Ibid.*, VI_2, 1897.

Rayman, B. (Praga). Uhlohydraty z hliz cyclamen europaeum. *Rozpravy České Ak.*, V_2, 1896.

Rayman, B. e Šulc, O. (Praga). Inverse sacharosy vodou. *Rozpravy České Ak.*, V_2, 1896.

Reina, V. (Roma). [*Vedi* t. XI, pag. 90]. Sulla teoria delle projezioni quantitative. *Rend. Acc. Lincei*, VI_5, 1897.

Reye, Th. (Strassburg). [*Vedi* t. XI, pag. 90]. Neue Eigenschaften des Strahlecomplexes zweite Grades. *Math. Annalen*, XLIX, 1897.

Ricci, G. (Padova). [*Vedi* t. XI, pag. 90]. Della teoria dei numeri reali secondo il concetto di Dedekind. *Giorn. di Battaglini*, XXXIV, 1896.

— Della equazione fondamentale di Weingarten nella teoria delle superficie applicabili. *Atti Ist. Ven.*, $VIII_7$, 1896-97.

— Del teorema di Stokes in uno spazio qualunque a tre dimensioni ed in coordinate generali. *Ibid.*, $VIII_7$, 1896-97.

— Lezioni sulla teoria delle superficie. Padova, 1898.

— Sur les groupes continus de mouvements d'une variété quelconque à trois dimensions. *Comptes Rendus*, CXXVII, 1898.

— Sur les groupes continus de mouvements d'une variété quelconque. *Ibid.*, CXXVII, 1898.

Riccò, A. (Catania). [*Vedi* t. XI, pag. 90]. Gli osservatorii di Catania e dell'Etna. *Mem. Soc. Spettroscopisti Ital.*, XXVI, 1897.

Riccò A. e Saya G. [*Vedi* t. XI, pag. 90]. Risultati delle osservazioni metereologiche fatte nel quinquennio 1892-96 all'Osservatorio di Catania.

Riemann, B. Œuvres Mathématiques, traduites par L. Laugel. Paris, 1898.

Ripert, L. La dualité et l'homographie dans le triangle et le tetraèdre. Paris, 1898.

Ruffini, F. P. (Bologna). [*Vedi* t. XI, pag. 90]. Delle accelerazioni che nel moto di un sistema rigido sono dirette ad uno stesso punto qualsivoglia dato. Nota IIª. *Rend. Acc. Bologna*, 1897-98.

— Ricerca di coniche che incontrano ad angoli retti le coniche di una serie di coniche. *Ibid.*, 1897-98.

Salemi-Pace, G. (Palermo). Sull'equilibrio delle volte simmetriche. *Società Sc. Nat. ed Econ. Palermo*, 1879.

— Sulla determinazione degli sforzi molecolari ammissibili nelle costruzioni metalliche in base alle esperienze di Wöhler. *Atti del Collegio degli Ing. ed Arch. di Palermo*, 1880.

— Determinazione sperimentale delle costanti specifiche delle pietre da costruzione della Sicilia. *Ibid.*, 1881.

— Sull'equilibrio delle volte simmetriche. Palermo, 1884.

— Determinazione sperimentale delle costanti specifiche delle pietre da costruzione della Sicilia. *Atti del Collegio degli Ing. ed Arch. di Palermo*, 1890.

— Di taluni saggi sulla resistenza delle pietre alla compressione. *Ibid.*, 1894.

— Sul piano di rottura di un terrapieno e sulla direzione della spinta contro una parete piana resistente. *Ibid.*, 1896.

Scott, Angas Ch. (Bryn Mawr). An introductory account of certain modern ideas and methods in plane analytical geometry. New-York, 1894.

SCUOLA D'APPLICAZIONE PER GL'INGEGNERI IN NAPOLI. Pubblicazione deliberata dal Consiglio Direttivo in occasione della Esposizione Nazionale di Torino. 1898.

SCUOLA D'APPLICAZIONE PER GL'INGEGNERI DI ROMA. [*Vedi* t. XI, pag. 90]. Annuario per l'anno scolastico 1897-98.

Seydler, A. [*Vedi* t. VII, pag. 8]. Základové theoretické fysiky. Praze, 1895.

Sommer, J. (Tübingen). Ueber die Bestimmung ausgezeichneter Punktgruppen auf Kurven vom Geschlecht *p*. Inaugural-Dissertation. Tübingen, 1898.

Studnička, F. J. (Praga). [*Vedi* t. IX, pag. 7]. O determinantech mocninných a sestavných. *Spisův poctěných jubilejní cenou Král. České Společnosti Náuch v Praze*, 1897.

Sucharda, A. (Praga). O křivkách asymptotických jistých ploch třetiho stupně. *Rozpravy České Ak.*, V_2, 1896.

— Kterak lze sestrojiti tečny ke křivkám intensitním ploch translačných vůbec a kuželasečkových zvlášt. *Ibid.*, VI_2, 1897.

— Kterak sestrojí se normala a střed křivosti k radiale libovolné křivky rovinné. *Ibid.*, VI_2, 1897.

Tannery, Y. et Molk, Y. (Paris, Nancy). [*Vedi* t. XI, pag. 90]. Éléments de la théorie des Fonctions elliptiques. Tome III. Calcul intégral. (1ère Partie). Paris, 1898.

Teixeira, F. Gomes. (Porto). [*Vedi* t. VIII, pag. 9]. Sobre o Desenvolvimento

das Funcçoes em Série. *Memorias de la Real Academia de Ciencias de Madrid*, XVIII, 1897.

Tikhomandritzky, M. (Karkow). [*Vedi* t. X, pag. 13]. Cours de la théorie des probabilités. Karkow, 1898.

Tiselius, H. (Stockholm). Ueber Zuschlagsprämien und einige damit zusammenhängende Fragen. *Öfversigt af k. Vetenskaps-Ak. Förhandlingar*, 1895.

Traverso, N. (Savona). Generalizzazione dell'ordinaria analisi combinatoria elementare. *Giorn. di Battaglini*, XXXV, 1897.

Urzi, G. (Messina). Un caso particolare del problema della rotazione di un corpo solido di rivoluzione sospeso per un punto del suo asse di simmetria. *Giorn. di Battaglini*, XXXVI, 1898.

Vailati, G. (Crema). Il metodo deduttivo come strumento di ricerca. Lettura d'introduzione al corso di Lezioni sulla Storia della Meccanica, tenuto all'Università di Torino, l'anno 1897-98.

Vivanti, G. (Messina). [*Vedi* t. XI, pag. 91]. Sul determinante wronskiano. *Rend. Acc. Lincei*, VII_2, 1898.

— Osservazione sui massimi e minimi delle funzioni di due variabili. *Ibid.*, VII_2, 1898.

— Teoria dei gruppi di trasformazione. Lezioni di Analisi superiore fatte nella R. Università di Messina nell'anno 1897-98, e raccolte dal Dr. D. Apreda. (Litogr.). Reggio Calabria.

Votoček, E. (Praga). O derivatech karbazolu. *Rozpravy České Ak.*, V_2, 1896.

Weber, H. (Strasburgo). Traité d'Algèbre supérieure. Traduit de l'allemand sur la deuxième édition par M. J. Griess. [Principes. — Racines des équations. Grandeurs algébriques.-Théorie de Galois.] Paris, 1898.

Wessel, G. (Copenhague). Essai sur la représentation analitique de la direction. Traduction publiée par l'Ac. des Sciences et Lettres de Danemark, 1897.

Weyr, E. (Praga) [*Vedi* t. X, pag. 14]. O strojení oskulačních hyperboloidů k plochám zborceným. *Rozpravy České Ak.*, V_2, 1896.

Wigert, S. Remarque sur le nombre des nombres premiers inférieurs à une quantité donnée. *Öfversigt af k. Vetenskaps-Ak. Förhandlingar*, 1895.

Zeuthen, H.-G. (Kopenhague). [*Vedi* t. XI, pag. 91]. Notes sur l'histoire des mathématiques. *Bull. de l'Ac. des Sciences et Lettres de Danemark*, 1897.

Zona, T. (Palermo). [*Vedi* t. V, pag. 9]. Pubblicazioni del R. Osservatorio di Palermo, N° 5.

— Latitudine del R. Osservatorio Astronomico di Catania determinata nel 1894 col metodo di Talcott. Firenze, 1896.

E. C.

INDICE

PUBBLICAZIONI NON PERIODICHE

PERVENUTE IN DONO AL CIRCOLO.

Fine della Parte 2ª del Tomo XIII (1899).

Tipografia Matematica, 11, via Villareale, Palermo.